ΕΜΠ-ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ-ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΦΥΣΙΚΗ Ι

Κεφάλαιο ΙΙ
(Νόμοι Νεύτωνα)

Β.1 Ένας κυνηγός σημαδεύει πίθηκο που κάθεται πάνω σ' ένα δέντρο, αλλά τη στιγμή του πυροβολισμού ο πίθηκος αφήνεται να πέσει από το δέντρο. Να δειχθεί ότι ο κυνηγός θα πετύχει τον πίθηκο, ανεξάρτητα από την ταχύτητα του βλήματος, αρκεί ο πίθηκος να μην έχει ακουμπήσει το έδαφος πριν τον φτάσει το βλήμα.

Β.2 Ένα βλήμα εκτοξεύεται με ταχύτητα $\boldsymbol{v_0}$ και γωνία β ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Να βρεθεί α) η απόσταση R που το βλήμα θα συναντήσει ένα κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία α με το οριζόντιο επίπεδο και ξεκινάει από το σημείο βολής. β) Για ποιά τιμή της γωνίας β η απόσταση R γίνεται μέγιστη. γ) Υπολογίστε την R_{max}

Β.3 Δύο σώματα που κινούνται κοντά στην επιφάνεια της Γής την χρονική στιγμή $t=0$ είναι στο ίδιο σημείο και έχουν ταχύτητες αντίστοιχα v_1, v_2 οριζόντιες και αντίθετες. Να βρεθεί η απόσταση ανάμεσα στα δύο σώματα τη χρονική στιγμή που τα διανύσματα των ταχυτήτων τους θα είναι κάθετα.

Β.4 Ένα φορτηγό κινείται σε ευθύγραμμο οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα *10 m/sec*. Ένας επιβάτης στο πίσω μέρος του φορτηγού θέλει να πετάξει μία μπάλα και να την πιάσει πάλι αφού το φορτηγό έχει κινηθεί κατά *30 m*. (α) Με ποιά γωνία σε σχέση με την κατακόρυφο πρέπει να ρίξει την μπάλα και με πόση αρχική ταχύτητα; (β) Ποιο είναι το σχήμα της τροχιάς της μπάλας που βλέπει ο επιβάτης; (γ) Ένας παρατηρητής στο έδαφος τι αρχική ταχύτητα υπολογίζει για την μπάλα και ποια είναι η τροχιά της μπάλας στο σύστημα του εδάφους;

Β.5 Ένα πλοίο βρίσκεται στην δυτική ακτή ενός ορεινού νησιού. Το πλοίο αυτό μπορεί να πλησιάσει μέχρι *2000 m* οριζόντια από την κορυφή του βουνού που έχει ύψος *1500 m* και μπορεί να εκτοξεύει βλήματα με αρχική ταχύτητα *300 m/sec*. Αν η ανατολική ακτή είναι επίπεδη και απέχει *300 m* οριζόντια από την κορυφή του βουνού, ποια είναι η απόσταση από την ακτή όπου ένα δεύτερο πλοίο μπορεί να είναι ασφαλές από τα πυρά του πρώτου πλοίου;

Β.6 Ένα σωματίδιο με μάζα m κινείται στο επίπεδο (x,y) υπό την επίδραση δύναμης $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r}$ όπου k μια θετική σταθερά και $\boldsymbol{r}$ το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου. (α) Να λυθούν οι εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου ως προς τους άξονες x, y. (β) Ποια είναι η συνθήκη ώστε το σωματίδιο να εκτελεί κυκλική κίνηση και ποια είναι η περίοδος της κίνησης; (γ) Ποια είναι η συνθήκη ώστε η κίνηση να είναι ευθύγραμμη με κλίση 30^0 ως προς τον άξονα των x.

Β.7 Ένα σώμα μάζας m βρίσκεται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο. Η γωνία θ που σχηματίζει το κεκλιμένο επίπεδο με το έδαφος είναι αρχικά μηδενική και αυξάνεται αργά μέχρι τη στιγμή που το σώμα αρχίζει να κινείται. Τότε η γωνία διατηρείται σταθερή. Αν οι συντελεστές στατικής και κινητικής τριβής είναι αντίστοιχα μ_s και μ_k όπου $\mu_s > \mu_k$. Να βρεθούν η ταχύτητα της μάζας και η θέση της σαν συνάρτηση του χρόνου. Δίνονται: g, μ_s, μ_k.

B.8 Μικρό σώμα μάζας *m* βρίσκεται αρχικά τοποθετημένο στο άκρο *B* δοκού *AB* μήκους *L* και μάζας *M* που βρίσκεται πάνω στο έδαφος. Στη δοκό δίνουμε ακαριαία ταχύτητα v_0 στη κατεύθυνση *AB*. Αν ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στη δοκό και στο μικρό σώμα είναι μ, ενώ η τριβή ανάμεσα στη δοκό και το έδαφος είναι αμελητέα, να υπολογίσετε τη v_0 έτσι ώστε το σώμα να πέσει από τη δοκό.

B.9 Ένα μικρό σώμα μάζας *m* αρχίζει να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μ μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση x από το σημείο εκκίνησης, $\mu=\lambda x$ (όπου $\lambda>0$), κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.

α) Γράψτε τη διαφορική εξίσωση κίνησης του σώματος κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.

β) Χρησιμοποιείστε τη σχέση $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$ και ολοκληρώστε τη διαφορική εξίσωση, ώστε να υπολογίσετε την ταχύτητα $v=v(x)$ κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.

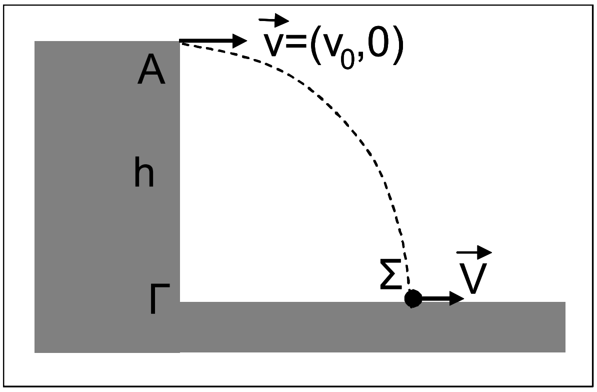
γ) Να υπολογίσετε την απόσταση που θα διανύσει το σώμα έως ότου σταματήσει.

δ) Βρείτε τη θέση όπου μεγιστοποιείται η ταχύτητα καθώς και τη μέγιστη ταχύτητα.

B.10 Σωματίδιο μάζας *m* κινείται στο επίπεδο xy. Το επίπεδο xy είναι οριζόντια λεία επιφάνεια. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο (0, 0) και έχει ταχύτητα $\mathbf{\vec{\upsilon}}_0$ η οποία σχηματίζει γωνία 45$^{\text{o}}$ με τον άξονα x. Η μόνη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι μία δύναμη τριβής, $-mk\upsilon_y\hat{\mathbf{y}}$, ανάλογη της συνιστώσας υ_y της ταχύτητάς του, όπου k είναι ένας σταθερός θετικός συντελεστής. (α) Ποια είναι η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου; (β) Βρείτε την ταχύτητά του ως συνάρτηση του χρόνου. (γ) Ποια είναι η εξίσωση της τροχιάς που διαγράφει το σωματίδιο στο επίπεδο xy; (δ) Ποια είναι η μέγιστη τιμή y_m του y στην τροχιά;

Απαντήσεις: β) $\upsilon_x=\upsilon_0/\sqrt{2},\quad \upsilon_y=(\upsilon_0/\sqrt{2})e^{-kt}$, γ) $y=\frac{\upsilon_0}{\sqrt{2}\,k}\left[1-\exp\left(-\frac{\sqrt{2}\,k}{\upsilon_0}x\right)\right]$, δ) $y_m=\frac{\upsilon_0}{\sqrt{2}\,k}$

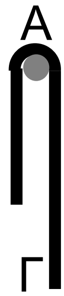
B.11 Από το σημείο Α σφαίρα βάλλεται οριζόντια, με ταχύτητα $\bar{v}=(v_0,0)$, με σκοπό να πετύχει τον στόχο Σ που κινείται με ταχύτητα $\bar{V}=(v_1,0)$, οριζόντια και σε κατακόρυφη απόσταση h από το Α. Ο στόχος Σ και η σφαίρα ξεκινούν ταυτόχρονα ($t=0$) από τα σημεία Α και Γ αντίστοιχα. Η αντίσταση του αέρα, που θεωρούμε ότι επενεργεί μόνο στη σφαίρα, είναι ανάλογη με την ταχύτητα: $-k\bar{v}$ ($k>0$). α) Γράψτε τη διανυσματική εξίσωση κίνησης για τη σφαίρα. β) Βρείτε τις v_x και v_y της σφαίρας ως συνάρτηση του χρόνου. γ) Βρείτε τα $x(t)$ και $y(t)$ της σφαίρας (θεωρώντας το σημείο Α ως αρχή των αξόνων). δ) Γράψτε τις σχέσεις που υπακούουν τα $x(t)$ και $y(t)$ υποθέτοντας ότι η σφαίρα συναντά τον στόχο κάποια χρονική στιγμή t_0. ε) Στην περίπτωση που ισχύει το (δ), δείξτε, απαλείφοντας όρους με εκθετικά, ότι η σφαίρα πετυχαίνει τον στόχο σε χρόνο: $t_0=\frac{kh}{mg(1-\ v_1/v_0)}$



B.12 Μοτοσικλέτα μάζας m κινούμενη στην ύπαιθρο με ταχύτητα v_0 πέφτει πάνω σε σωρό με άχυρο, πάχους *d* και τον διαπερνά. Αν η δύναμη τριβής μέσα στο σωρό είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας ($-kv^2$) (και θεωρήσουμε ότι η μηχανή έσβησε μόλις μπήκε στα άχυρα), να υπολογισθούν: α) η ταχύτητα της μοτοσικλέτας ως συνάρτηση του χρόνου, β) η ταχύτητα της μοτοσικλέτας ως συνάρτηση της απόστασης x που διανύει μέσα στο άχυρο και γ) ο χρόνος που χρειάζεται η μοτοσικλέτα να περάσει από τον σωρό.

Β.13 **Σ**ώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $V\hat{\mathbf{y}}$ $(V>0)$ κατά μήκος του άξονα των y, η θετική κατεύθυνση του οποίου είναι προς τα πάνω. Η αρχική θέση του σώματος είναι $y=0$. Πάνω στο σώμα δρα, εκτός του βάρους του, δύναμη τριβής από τον αέρα ίση με $-mk\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$, όπου $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$ η ταχύτητα του σώματος και k μια θετική σταθερά. (α) Να διατυπωθεί η εξίσωση κίνησης του σώματος. (β) Δείξτε ότι τα υ και y ικανοποιούν τη σχέση $y=\dfrac{V-\upsilon}{k}-\dfrac{g}{k^2}\ln\left(\dfrac{1+kV/g}{1+k\upsilon/g}\right)$. (γ) Βρείτε το μέγιστο ύψος H στο οποίο θα φθάσει το σώμα. Απ.: $H=\dfrac{V}{k}-\dfrac{g}{k^2}\ln\left(1+\dfrac{kV}{g}\right)$. (δ) Αν το σώμα πέφτει κατακόρυφα, χωρίς αρχική ταχύτητα από ύψος H_0, βρείτε την ταχύτητά του ως συνάρτηση του χρόνου και δείξτε ότι τείνει σε μια οριακή τιμή. (ε) Βρείτε τη θέση του σώματος, y, ως συνάρτηση του χρόνου. (στ) Αναπτύξτε τις απαντήσεις για τα $y(t)$ και $\upsilon(t)$ σε σειρές δυνάμεων του χρόνου, για να βρείτε σχέσεις που ισχύουν για μικρές τιμές του t. Δίνεται το ανάπτυγμα: $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dots$.

Β.14 Λεπτό ομογενές σχοινί μάζας Μ και μήκους L τοποθετείται γύρω από ένα λείο ξυλόκαρφο πολύ μικρής ακτίνας (βλ. σχήμα). Όταν ξεκινά η κίνηση το (ΑΓ)=b (b>L/2). Βρείτε την επιτάχυνση και την ταχύτητα του σχοινιού όταν το (ΑΓ)=2L/3.



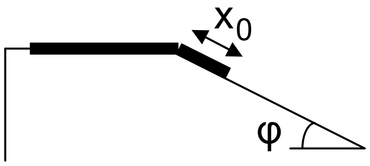
Β.15 Ομογενής, μη εκτατή, αλυσίδα μήκους L και μάζας m είναι τοποθετημένη έτσι ώστε ένα τμήμα της, μήκους $x>0$ να κρέμεται από την άκρη ενός οριζόντιου τρπεζιού, ενώ το υπόλοιπο είναι απλωμένο σε ευθεία γραμμή στην επιφάνεια του τραπεζιού, με το οποίο έχει συντελεστές τριβής $\mu_{\sigma\tau}=\mu_{\kappa\iota\nu}=\mu$. Η αλυσίδα αισθάνεται κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας g.

(α) Βρείτε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί το μήκος $x=x_0$, ώστε η αλυσίδα να είναι ακίνητη.

(β) Τη χρονική στιγμή $t=0$ το x γίνεται μεγαλύτερο του x_0 ώστε η αλυσίδα να αρχίσει να κινείται. Να γράψετε την εξίσωση κίνησης και να υπολογίσετε την ταχύτητα $v(x)$ ως συνάρτηση του x.

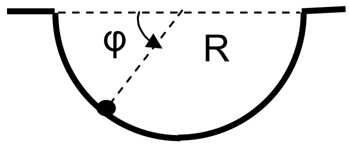
(γ) Επιλύοντας την $dx/dt=v(x)$, με βάση τις αρχικές συνθήκες και τα αποτελέσματα του προηγούμενου ερωτήματος, να υπολογίσετε τον συνολικό χρόνο που χρειάζεται η αλυσίδα για να εγκαταλείψει το τραπέζι.

(Δίνεται: $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{\ln(2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)})}{\sqrt{a}}$)



B.16 Ομογενής αλυσίδα συνολικού μήκους L και μάζας M είναι τοποθετημένη έτσι ώστε τη χρονική στιγμή t=0 τμήμα της μήκους x_0 να βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας φ. Αν δεν υπάρχουν τριβές βρείτε την ταχύτητα την οποία έχει αποκτήσει η αλυσίδα όταν βρίσκεται πια εξ ολοκλήρου στο κεκλιμένο επίπεδο.

B.17 Μικρή σφαίρα μάζας m ξεκινά να ολισθαίνει χωρίς τριβές σε ημικυλινδρική κοιλότητα ακτίνας *R*. Να βρείτε την δύναμη που ασκεί το κυλινδρικό τοίχωμα στη σφαίρα ως συνάρτηση της γωνίας *φ* (Σημείωση: χρησιμοποιείστε πολικές συντεταγμένες). Λύστε το ίδιο πρόβλημα εάν ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και κοιλότητας είναι *μ*. Βρείτε την γωνιακή ταχύτητα σαν συνάρτηση της γωνίας *φ*.



B.18 Ένα σώμα ολισθαίνει προς τα κάτω, χωρίς αρχική ταχύτητα και χωρίς τριβές, από την κορυφή A μιας σφαίρας ακτίνας R. Σε ποια κατακόρυφη απόσταση από την κορυφή της σφαίρας θα ξεφύγει από την επιφάνειά της; Πόση θα είναι η ταχύτητα του σώματος στο σημείο αυτό;

B.19 Μία χάντρα μάζας *m* κινείται κατά μήκος της περιφέρειας ενός κατακόρυφου λείου δακτυλιδιού ακτίνας *R*. Η χάντρα βάλλεται από την κατώτερη θέση του δακτυλιδιού με τόση ενέργεια ώστε μόλις να μπορεί να φτάσει στην κορυφή του. Βρείτε μια έκφραση για την δύναμη που ασκεί το δακτυλίδι στην χάντρα και προσδιορίστε το σημείο όπου αυτή αλλάζει πρόσημο.

B.20 Βρείτε το πεδίο βαρύτητας δίσκου μάζας *M* και ακτίνας *R*, επάνω στον κατακόρυφο άξονα που περνάει από το κέντρο του δίσκου. Ο δίσκος έχει σταθερή πυκνότητα μάζας ανά μονάδα επιφανείας. Βρείτε την οριακή συμπεριφορά του πεδίου για πολύ μικρή απόσταση από το κέντρο του δίσκου και για πολύ μεγάλη απόσταση αντίστοιχα.