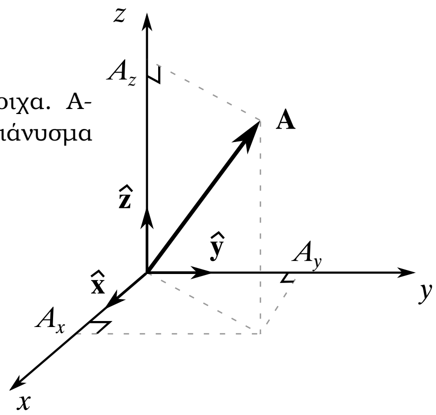
1

Διανύσματα

Ο φυσικός χώρος μέσα στον οποίο ζούμε και κινούμαστε είναι ένας τρισδιάστατος ευκλείδειος γραμμικός χώρος. Ισχύουν λοιπόν τα αξιώματα της Γεωμετρίας του Ευκλείδη, το πυθαγόρειο θεώρημα και χρειάζονται τρεις πραγματικοί αριθμοί «συντεταγμένες» για να προσδιορίσουμε τη θέση μας στον κόσμο. Οι τρεις αυτές συντεταγμένες ως προς κάποιο σύστημα αξόνων ορίζουν το διάνυσμα θέσης. Η στιγμιαία μεταβολή στη θέση ενός σώματος δίνεται από ένα άλλο διάνυσμα, την ταχύτητα. Ομοίως η δύναμη, η επιτάχυνση, το ηλεκτρομαγνητικο πεδίο είναι διανύσματα γενικά τρισδιάστατα. Ξεκινάμε λοιπόν με μια εισαγωγή στα διανύσματα.

1.1 Αλγεβρικές πράξεις μεταξύ διανυσμάτων



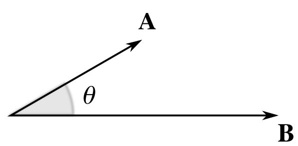
Μοναδιαία διανύσματα $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$ επάνω στους τρεις άξονες (x, y, z) αντίστοιχα. Αναλύουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{A}$ σε τρεις συνιστώσες, προβάλλοντας κάθετα το διάνυσμα επάνω στους τρεις άξονες x, y, z:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= A_x\hat{\boldsymbol{x}} + A_y\hat{\boldsymbol{y}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}} \\
c\boldsymbol{A} &= cA_x\hat{\boldsymbol{x}} + cA_y\hat{\boldsymbol{y}} + cA_z\hat{\boldsymbol{z}} \\
\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} &= (A_x \pm B_x)\,\hat{\boldsymbol{x}} + (A_y \pm B_y)\,\hat{\boldsymbol{y}} + (A_z \pm B_z)\,\hat{\boldsymbol{z}} \\
c\,(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) &= c\boldsymbol{A} \pm c\boldsymbol{B} \\
\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} &= \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}
\end{aligned}$$

Μέτρο του διανύσματος $\boldsymbol{A}$ από το πυθαγόρειο θεώρημα:

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

1.2 Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων

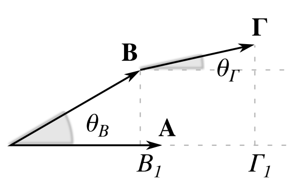


- $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\cos\theta = |\boldsymbol{B}| \cdot$ προβολή του $\boldsymbol{A}$ στο $\boldsymbol{B}$
- $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$
- $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \pm \boldsymbol{\Gamma}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \pm \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\Gamma}$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\Gamma}) &= |\boldsymbol{A}| \cdot (\text{προβολή}\boldsymbol{B} + \text{προβολή}\boldsymbol{\Gamma}) \\
&= |\boldsymbol{A}| \cdot (\mathrm{OB}_1 + \mathrm{B}_1\Gamma_1) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \\
\mathrm{OB}_1 &= |\boldsymbol{B}| \cos\theta_B \\
\mathrm{B}_1\Gamma_1 &= |\boldsymbol{\Gamma}| \cos\theta_\Gamma
\end{aligned}$$

□

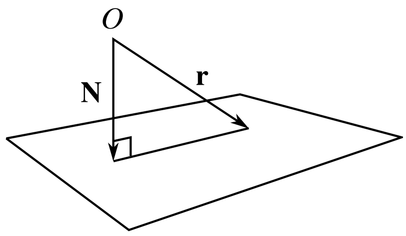


- $\boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = A_x$
- $\hat{\boldsymbol{A}} = \dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = \hat{\boldsymbol{x}}\dfrac{A_x}{|\boldsymbol{A}|} + \hat{\boldsymbol{y}}\dfrac{A_y}{|\boldsymbol{A}|} + \hat{\boldsymbol{z}}\dfrac{A_z}{|\boldsymbol{A}|}$
- $|\hat{\boldsymbol{A}}| = 1$
- Διευθύνοντα Συνημίτονα $\dfrac{A_x}{|A|}, \quad \dfrac{A_y}{|A|}, \dfrac{A_z}{|A|}$

1.2.1 Εφαρμογές του εσωτερικού γινομένου

1. Ρυθμός παραγωγής έργου
$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$$
όπου $\boldsymbol{F}$ είναι η δύναμη και $\boldsymbol{v}$ η ταχύτητα.

2. Εξίσωση επιπέδου κάθετου στο διάνυσμα $\boldsymbol{N}$



$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{r} &= |\boldsymbol{N}| \cdot (\text{προβολή του } \boldsymbol{r} \text{ στο } \boldsymbol{N}) = |\boldsymbol{N}| \cdot |\boldsymbol{N}| = N^2 \\
\boldsymbol{N} &= \hat{\boldsymbol{x}}N_x + \hat{\boldsymbol{y}}N_y + \hat{\boldsymbol{z}}N_z \\
\boldsymbol{r} &= x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}} \\
\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{r} &= xN_x + yN_y + zN_z = N^2
\end{aligned}$$
$$\Rightarrow x\frac{N_x}{N^2} + y\frac{N_y}{N^2} + z\frac{N_z}{N^2} = 1$$
$$\Rightarrow ax + by + cz = 1$$

1.2.2 Ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου

- Εάν $\boldsymbol{A} \parallel \boldsymbol{B}$ τότε $\theta = 0$ και άρα $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$.
- Εάν $\theta = \pi$, τότε $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = -|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$ αντιπαράλληλα διανύσματα.
- Για το μέτρο του $\boldsymbol{A}$ έχουμε
$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

Γενικά είναι

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} &= (A_x\hat{\boldsymbol{x}} + A_y\hat{\boldsymbol{y}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}})\,(B_x\hat{\boldsymbol{x}} + B_y\hat{\boldsymbol{y}} + B_z\hat{\boldsymbol{z}}) = A_xB_x\hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} + A_xB_y\hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{y}} + \ldots \\
&= A_xB_x \cdot 1 + A_xB_y \cdot 0 + \ldots = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z
\end{aligned}$$

διότι

$$\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{y}} = 1 \cdot 1 \cos\frac{\pi}{2} = 0 \\
&\hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = 0 \\
&\hat{\boldsymbol{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = 0 \\
&\hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = 1 \cdot 1 \cos 0 = 1, \quad \hat{\boldsymbol{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{y}} = 1, \quad \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = 1
\end{aligned}$$

1.3 Εξωτερικό Γινόμενο δύο διανυσμάτων

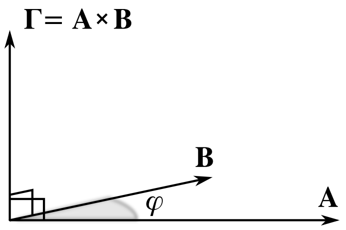
$$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{\Gamma}}\,|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = \hat{\boldsymbol{\Gamma}}|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| \sin\phi$$

Η γωνία ϕ έχει φορά από το $\boldsymbol{A}$ στο $\boldsymbol{B}$. Τα διανύσματα $\boldsymbol{\Gamma}$, $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}$ είναι κάθετα στο επίπεδο $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

Ιδιότητες

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$$

Αλλάζει η φορά της γωνίας ϕ
$$\phi \to -\phi \Rightarrow \sin\phi \to -\sin\phi$$



Σχήμα 1.1

Ιδιότητες μοναδιαίων διανυσμάτων

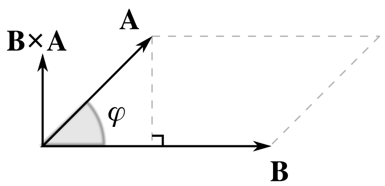
$$
\begin{aligned}
|\hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{x}}| &= 1 \cdot 1 \sin 0 = 0 \\
|\hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{y}}| &= 1 \cdot 1 \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\
|\hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{z}}| &= 1 \\
|\hat{\boldsymbol{y}} \times \hat{\boldsymbol{z}}| &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
\hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{y}} & = \hat{\boldsymbol{z}} \\
\hat{\boldsymbol{y}} \times \hat{\boldsymbol{z}} & = \hat{\boldsymbol{x}} \\
\hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{x}} & = \hat{\boldsymbol{y}}
\end{cases}
$$

όπου οι τελευταίες τρεις σχέσεις ισχύουν εφόσον χρησιμοποιούμε δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων. Εάν $\boldsymbol{A} \parallel \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = 0$.

Έκφραση μέσω συνιστωσών:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= (A_x \hat{\boldsymbol{x}} + A_y \hat{\boldsymbol{y}} + A_z \hat{\boldsymbol{z}}) \times (B_x \hat{\boldsymbol{x}} + B_y \hat{\boldsymbol{y}} + B_z \hat{\boldsymbol{z}}) \\
&= A_x B_x \hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{x}} + A_x B_y \hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{y}} + A_x B_z \hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{z}} + \ldots \\
&= A_x B_x 0 + A_x B_y \hat{\boldsymbol{z}} + A_x B_z \left(-\hat{\boldsymbol{y}}\right) + \ldots \\
&= \ldots = \hat{\boldsymbol{x}} \left(A_y B_z - A_z B_y\right) + \hat{\boldsymbol{y}} \left(A_z B_x - A_x B_z\right) + \hat{\boldsymbol{z}} \left(A_x B_y - A_y B_x\right) \\
&= \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$



Σχήμα 1.2

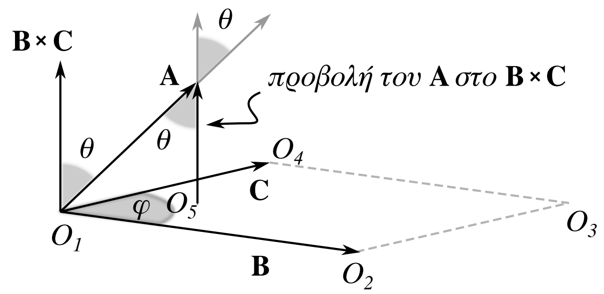
Το εξωτερικό γινόμενο δίνει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου A, B (βλ. σχήμα 1.2).

Μικτό γινόμενο

$$
\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \text{όγκος παραλληλεπιπέδου } A, B, C
$$

$$
\hat{\boldsymbol{x}} \cdot (\hat{\boldsymbol{y}} \times \hat{\boldsymbol{z}}) = 1,
$$

$$
\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}
$$



Σχήμα 1.3

1.4 Χρήσιμες ταυτότητες

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} &= (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\, \boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})\, \boldsymbol{A} \\
\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) &= (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\, \boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\, \boldsymbol{C} \\
(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) &= (\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{D}))\, \boldsymbol{C} - (\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}))\, \boldsymbol{D} \\
\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) &= -\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{B})
\end{aligned}
$$

Εφαρμογή : Ροπή δύναμης

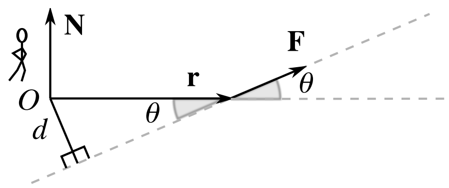
Έχουμε

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

$$N = dF$$

$$\boldsymbol{N} = \hat{\boldsymbol{N}} |\boldsymbol{r}|\, |\boldsymbol{F}| \sin\theta$$

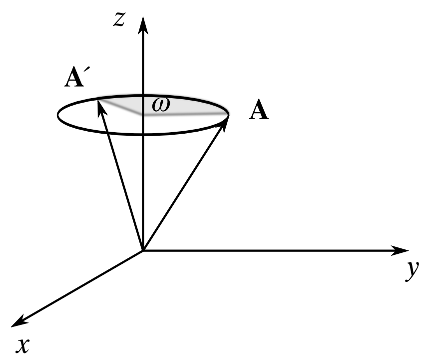
$$d = r \sin\theta$$



Εφαρμογή : Μαγνητική δύναμη σε κινούμενο φορτίο

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \qquad \text{δύναμη κάθετη στο επίπεδο } (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B})$$

1.5 Μετασχηματισμός ως προς στροφές



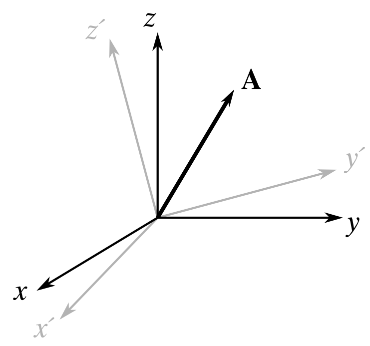
Σχήμα 1.4

(α) Στροφή διανύσματος γύρω από τον άξονα z κατά γωνία ω: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}'$. Το μέτρο του $\boldsymbol{A}$ είναι αναλλοίωτο.

$$|\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{A}'|^2 \Rightarrow A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A_x'^2 + A_y'^2 + A_z'^2$$

(β) Στροφή συστήματος συντεταγμένων $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}) \to (\hat{x}', \hat{\boldsymbol{y}}', \hat{\boldsymbol{z}}')$

Προβάλουμε το διάνυσμα στους άξονες:



$$\boldsymbol{A} = A_x\hat{\boldsymbol{x}} + A_y\hat{\boldsymbol{y}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}}$$
$$\boldsymbol{A} = A'_x\hat{\boldsymbol{x}'} + A'_y\hat{\boldsymbol{y}'} + A'_z\hat{\boldsymbol{z}'}$$

Προβάλουμε τα μοναδιαία διανύσματα $(\hat{x}', \hat{\boldsymbol{y}}', \hat{\boldsymbol{z}}')$ στους $(\hat{x}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$:

$$\hat{\boldsymbol{x}}' = a_1\hat{\boldsymbol{x}} + a_2\hat{\boldsymbol{y}} + a_3\hat{\boldsymbol{z}}$$
$$\hat{\boldsymbol{y}}' = b_1\hat{\boldsymbol{x}} + b_2\hat{\boldsymbol{y}} + b_3\hat{\boldsymbol{z}}$$
$$\hat{\boldsymbol{z}}' = c_1\hat{\boldsymbol{x}} + c_2\hat{\boldsymbol{y}} + c_3\hat{\boldsymbol{z}}$$

αντικαθιστούμε και βρίσκουμε τα A'_x, A'_y, A'_z.

1.6 Εφαρμογές - Προβλήματα

Πρόβλημα

$$\boldsymbol{A} = 3\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}} + 2\hat{\boldsymbol{z}}$$

(α) Μέτρο του διανύσματος

$$|\boldsymbol{A}|^2 = 9 + 1 + 4 = 14 \Rightarrow |\boldsymbol{A}| = \sqrt{14}$$
$$|\boldsymbol{A}|^2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}$$

(β) Προβολή του $\boldsymbol{A}$ στο επίπεδο (x, y)

$$\boldsymbol{A}_{\text{πρ}} = 3\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}, \qquad |\boldsymbol{A}_{\text{πρ}}|^2 = 9 + 1 = 10$$

(γ) Διάνυσμα $\boldsymbol{B}$ κάθετο στο $\boldsymbol{A}$ επί του επιπέδου (x, y)

$$\boldsymbol{B} = B_x\hat{\boldsymbol{x}} + B_y\hat{\boldsymbol{y}} \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\Rightarrow 3B_x + B_y = 0 \Rightarrow -3B_x = B_y$$

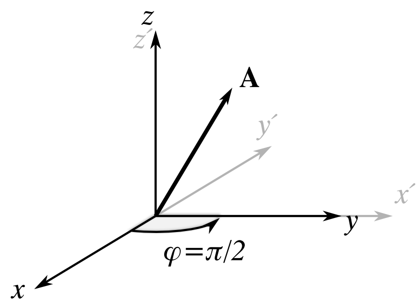
$$\Rightarrow \boldsymbol{B} = (\hat{\boldsymbol{x}} - 3\hat{\boldsymbol{y}})\, k$$

όπου k τυχαίος πραγματικός αριθμός.

Μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του $\boldsymbol{B}$

$$\hat{\boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|} = \frac{k\hat{\boldsymbol{x}} - 3k\hat{\boldsymbol{y}}}{\sqrt{k^2 + 9k^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{3}{\sqrt{10}}\hat{\boldsymbol{y}}$$

(δ) Περιστροφή του Συστήματος Συντεταγμένων κατά γωνία $\phi = \pi/2$ γύρω από τον άξονα $\hat{\boldsymbol{z}}$



Σχήμα 1.5

$$\Rightarrow \hat{\boldsymbol{x}}' = \hat{\boldsymbol{y}}, \qquad \hat{\boldsymbol{y}}' = -\hat{\boldsymbol{x}}, \qquad \hat{\boldsymbol{z}}' = \hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= 3\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}} + 2\hat{\boldsymbol{z}} \\
\boldsymbol{A} &= -3\hat{\boldsymbol{y}}' + \hat{\boldsymbol{x}}' + 2\hat{\boldsymbol{z}}' = \hat{\boldsymbol{x}}' - 3\hat{\boldsymbol{y}}' + 2\hat{\boldsymbol{z}}' \\
\boldsymbol{B} &= \hat{\boldsymbol{x}} - 3\hat{\boldsymbol{y}} \\
\boldsymbol{B} &= -\hat{\boldsymbol{y}}' - 3\hat{\boldsymbol{x}}' = -3\hat{\boldsymbol{x}}' - \hat{\boldsymbol{y}}' \\
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= 3 - 3 = 0 \text{ στο σύστημα συντεταγμένων } (x, y, z) \\
\text{Επίσης } \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= -3 + 3 = 0 \text{ στο σύστημα συντεταγμένων } (x', y', z')
\end{aligned}$$

Το εσωτερικό γινόμενο αναλλοίωτο ως προς την αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων.

Πρόβλημα

Δίνονται τα δύο διανύσματα $\boldsymbol{A} = 2\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}} + 4\hat{\boldsymbol{z}}$ και $\boldsymbol{B} = 5\hat{\boldsymbol{x}} + 2\hat{\boldsymbol{y}} - 2\hat{\boldsymbol{z}}$.

(α) $\boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{B}$

(β) Να βρείτε το διάνυσμα $\boldsymbol{\Gamma}$ που είναι κάθετο στο $\boldsymbol{A}$ και το $\boldsymbol{B}$.

Λύση:

(α)

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 10 - 2 - 8 = 0$$

(β)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Gamma} &= \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -6\hat{x} + 24\hat{\boldsymbol{y}} + 9\hat{\boldsymbol{z}} \\
\boldsymbol{\Gamma} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix} \\
\Gamma_x &= \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 8 = -6 \\
\Gamma_y &= -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 20) = 24 \\
\Gamma_z &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 5 = 9 \\
\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{A} &= 0, \qquad \boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{B} = 0
\end{aligned}$$

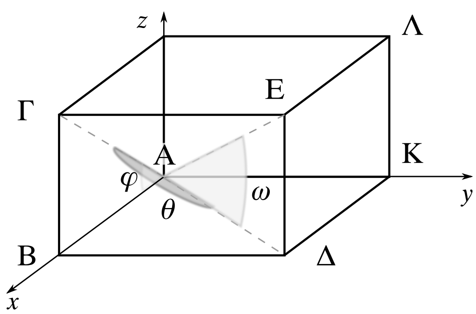
Πρόβλημα

Δίνεται κύβος με ακμή μήκους a. Να βρεθούν:

(α) η γωνία μεταξύ μιας ακμής και μιας μικρής διαγωνίου

(β) η γωνία μεταξύ δύο μικρών διαγωνίων

(γ) η γωνία μεταξύ μιας μικρής και μιας μεγάλης διαγωνίου



Λύση:

Έχουμε

$$\mathrm{A\Gamma} = a\sqrt{2}, \qquad \mathrm{A\Delta} = a\sqrt{2}$$

$$(\mathrm{AE})^2 = (\mathrm{A\Delta})^2 + (\Delta\mathrm{E})^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$$

$$\mathrm{AE} = a\sqrt{3}$$

(α)

$$\mathbf{AB} = a\hat{x}, \qquad \mathbf{A\Gamma} = a\hat{x} + a\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{A\Gamma} = |\mathrm{AB}| \cdot |\mathrm{A\Gamma}| \cos\phi$$

$$\cos\phi = \frac{\mathbf{AB} \cdot \mathbf{A\Gamma}}{|\mathrm{AB}||\mathrm{A\Gamma}|} = \frac{a^2}{a^2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\phi = \frac{\pi}{4}$$

(β)

$$\mathbf{A\Delta} = a\hat{x} + a\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A\Gamma} \cdot \mathbf{A\Delta}}{|\mathrm{A\Gamma}| \cdot |\mathrm{A\Delta}|} = \frac{a^2}{a\sqrt{2}a\sqrt{2}} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

(γ)

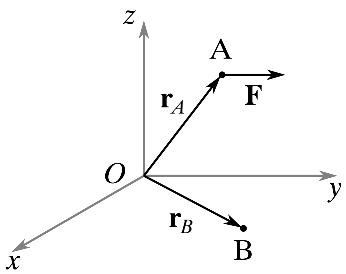
$$\cos\omega = \frac{\mathbf{AE} \cdot \mathbf{A\Delta}}{|\mathrm{AE}| \cdot |\mathrm{A\Delta}|}$$

$$\mathbf{AE} = \mathbf{A\Delta} + \mathbf{\Delta E} = a\hat{x} + a\hat{\boldsymbol{y}} + a\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\cos\omega = \frac{a^2 + a^2}{a\sqrt{3}a\sqrt{2}} = \frac{2a^2}{a^2\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Πρόβλημα

Η ροπή $\boldsymbol{N}$ μιας δύναμης $\boldsymbol{F}$ ως προς ένα δεδομένο σημείο P ορίζεται από το εξωτερικό γινόμενο $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$, όπου $\boldsymbol{r}$ το διάνυσμα από το δεδομένο σημείο P έως το σημείο που εφαρμόζεται η δύναμη. Δίνονται:



Σχήμα 1.6

$$\boldsymbol{F} = -3\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}} + 5\hat{\boldsymbol{z}}$$
$$\boldsymbol{r}_A = 7\hat{\boldsymbol{x}} + 3\hat{\boldsymbol{y}} + \hat{\boldsymbol{z}}$$
$$\boldsymbol{r}_B = 10\hat{\boldsymbol{y}}$$

(α) Ροπή της δύναμης $\boldsymbol{F}$ ως προς το O

$$\boldsymbol{N}_O = \boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ 7 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 14\hat{\boldsymbol{x}} - 38\hat{\boldsymbol{y}} + 16\hat{\boldsymbol{z}}$$

(β) Ροπή της δύναμης $\boldsymbol{F}$ ως προς το B

$$\boldsymbol{N}_B = \boldsymbol{r}_{BA} \times \boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{r}_{BA} \Rightarrow \boldsymbol{r}_{BA} = \boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B = 7\hat{\boldsymbol{x}} - 7\hat{\boldsymbol{y}} + \hat{\boldsymbol{z}}$$

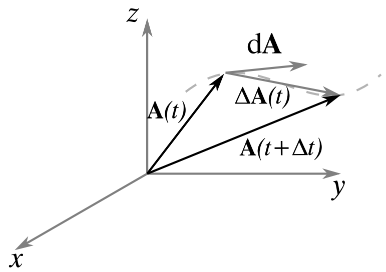
$$\boldsymbol{N}_B = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ 7 & -7 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -36\hat{\boldsymbol{x}} - 38\hat{\boldsymbol{y}} - 14\hat{\boldsymbol{z}}$$

1.7 Παραγώγιση διανύσματος (ταχύτητα)

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t) = A_x(t)\hat{\boldsymbol{x}} + A_y(t)\hat{\boldsymbol{y}} + A_z(t)\hat{\boldsymbol{z}}$$

Ορισμός:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{A}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t) - \boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}$$
$$\Delta \boldsymbol{A}(t) = \Delta A_x(t)\hat{\boldsymbol{x}} + \Delta A_y(t)\hat{\boldsymbol{y}} + \Delta A_z(t)\hat{\boldsymbol{z}}$$



Σχήμα 1.7

Εάν $\boldsymbol{A}$ το διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{r}$, τότε

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}(t)$$

η ταχύτητα του σώματος

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r_x}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\mathrm{d}r_y}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\mathrm{d}r_z}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Δεύτερη παράγωγος

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\boldsymbol{a}(t)}_{\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}} \qquad [\text{επιτάχυνση}]$$

[Παραγωγίζουμε κάθε συνιστώσα χωριστά, τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$ υποθέτουμε ότι δεν εξαρτώνται από την παράμετρο t].

1.7.1 Παραγώγιση αλγεβρικών παραστάσεων με διανύσματα

Η παραγώγιση αλγεβρικών παραστάσεων με διανύσματα γίνεται όπως ακριβώς όταν δεν έχουμε διανύσματα.

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})' = (\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B}')$$
$$(f\boldsymbol{A})' = f'\boldsymbol{A} + f\boldsymbol{A}'$$
$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}'$$
$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}'$$

Η απόδειξη των σχέσεων γίνεται εύκολα, αφού αναλύσουμε σε συνιστώσες τα εμπλεκόμενα διανύσματα.

1.7.2 Σχετική ταχύτητα, Σύνθεση ταχυτήτων

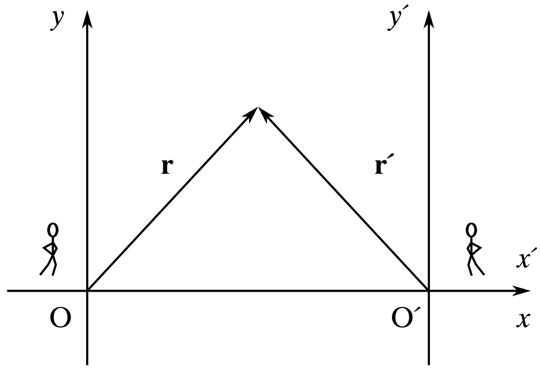
Έστω $\boldsymbol{r}(t)$ το διάνυσμα θέσης ενός σώματος για το σύστημα Ο τη χρονική στιγμή t (βλ σχήμα 1.8) και $\boldsymbol{r}'(t)$ το διάνυσμα θέσης του ιδίου σώματος για το σύστημα Ο$'$.

Ισχύει διανυσματικά η σχέση:

$$\boldsymbol{r}'(t) = \vec{\mathrm{O'O}} + \boldsymbol{r}(t)$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη ως προς τον χρόνο t έχουμε:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{O'O}}(t)}{\mathrm{d}t}$$



Σχήμα 1.8

$$\Rightarrow \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$$

όπου $\boldsymbol{u}$ η ταχύτητα του Ο ως προς το Ο′ (σχετική ταχύτητα) και $\boldsymbol{v}'$ η ταχύτητα του σώματος ως προς το τονούμενο, Ο′, σύστημα αναφοράς.

1.8 Εφαρμογές - Προβλήματα

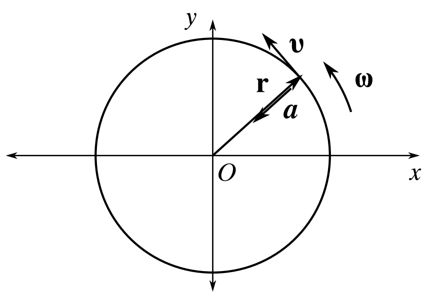
Πρόβλημα

Έστω $\boldsymbol{r}(t) = 3\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + 3\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}}$. Βρείτε την ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ και την επιτάχυνση $\boldsymbol{a}$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -3\omega\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + 3\omega\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}} \\
\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} &= \left(-9\omega^2 + 9\omega^2\right)\sin(\omega t)\cos(\omega t) = 0, \qquad \boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{v} \\
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -3\omega^2\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} - 3\omega^2\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}} \\
\Rightarrow \boldsymbol{a} &= -\omega^2\boldsymbol{r}
\end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 = 9\cos^2(\omega t) + 9\sin^2(\omega t) = 9$$

Η κίνηση γίνεται σε κύκλο ακτίνας $R = 3$, με κέντρο την αρχή των αξόνων. Η ταχύτητα είναι εφαπτόμενη της καμπύλης, τροχιάς, της κίνησης.



Σχήμα 1.9

Πρόβλημα

Κίνηση ρουκέτας στον κενό χώρο σε μία διάσταση x, εκτός πεδίου βαρύτητας, με ταχύτητα $v(t) = -u\ln(1-bt)$, όπου u η ταχύτητα του καυσαερίου ως προς την ρουκέτα και b ο ρυθμός κατανάλωσης καυσίμων, $(1-bt) > 0$.

(α) Να βρεθεί η επιτάχυνση

(β) Να βρεθεί η θέση $x(t)$, εάν $x(0) = 0$

(γ) Εάν $b = 7,5\times10^{-3}\ \mathrm{sec}^{-1}$ και εξαντλεί τα καύσιμα σε χρόνο $t_0 = 120$ sec, πόση ταχύτητα έχει αποκτήσει;

Λύση:

(α)

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{ub}{1 - bt}$$

(β)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v \Rightarrow \mathrm{d}x = v(t)\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \int_0^x \mathrm{d}x' = \int_0^t v(t')\mathrm{d}t' = -u \int_0^t \ln(1 - bt')\mathrm{d}t'$$

$$\begin{aligned} &z = 1 - bt' \Rightarrow \mathrm{d}z = -b\mathrm{d}t', \qquad 1 - bt > 0 \\ &x = \frac{u}{b}\int_1^{1-bt} \ln z \mathrm{d}z = \frac{u}{b}\left(z\ln z \Big|_1^{1-bt} \right) - \frac{u}{b}(1 - bt) + \frac{u}{b} \\ &x = ut + \frac{u}{b}(1 - bt)\ln(1 - bt) \\ &\ln z = (z\ln z)' - 1 \end{aligned}$$

(γ)

$$\begin{aligned} &v(t_0) = -u \ln\left(1 - 7,5 \times 10^{-3} \times 1,2 \times 10^2\right) = -u\ln(0,1) \\ &\Rightarrow v(t_0) = 2,3u \end{aligned}$$

Πρόβλημα

Ένα σωματίδιο κινείται στο επίπεδο (x, y) με ταχύτητα $\boldsymbol{v} = a\hat{\boldsymbol{x}} + b\hat{\boldsymbol{y}}$, όπου a, b σταθερές. Να βρείτε

(α) το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου

(β) την εξίσωση της τροχιάς $y(x)$

(γ) την επιτάχυνση $\boldsymbol{a}$.

Λύση:

(α) Έχουμε $\boldsymbol{v} = a\hat{\boldsymbol{x}} + b\hat{\boldsymbol{y}}$ και $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}}$

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$$

όπου $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\hat{\boldsymbol{x}} + \mathrm{d}y\hat{\boldsymbol{y}}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x \qquad \text{και} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_y \\ &\Rightarrow \mathrm{d}x = v_x\mathrm{d}t = a\mathrm{d}t \qquad \text{και} \qquad \mathrm{d}y = v_y\mathrm{d}t = b\mathrm{d}t \\ &\Rightarrow \int_{x_0}^x \mathrm{d}x' = \int_0^t a\mathrm{d}t' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x(t) - x(0) = at, \qquad \text{έστω } x(0) = 0 \Rightarrow x = at \\ &y(t) - y(0) = bt, \qquad \text{έστω } y(0) = 0 \Rightarrow y = bt \\ &\Rightarrow \boldsymbol{r} = at\hat{\boldsymbol{x}} + bt\hat{\boldsymbol{y}} \end{aligned}$$

(β)

$$\frac{y}{x} = \frac{bt}{at} = \frac{b}{a} \Rightarrow y = \frac{b}{a}x$$

(γ)

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 0$$

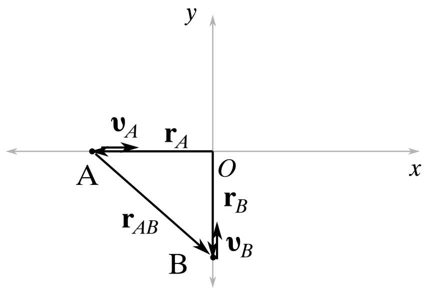
Πρόβλημα

Δύο σωματίδια A, B, κινούνται επάνω στους άξονες x και y αντίστοιχα, με ταχύτητες $\boldsymbol{v}_A = 2\hat{\boldsymbol{x}}$ m/sec και $\boldsymbol{v}_B = 3\hat{\boldsymbol{y}}$ m/sec. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ τα δύο σωματίδια βρίσκονται στις θέσεις $(-3, 0)$ m και $(0, -3)$ m, αντίστοιχα.

(α) Υπολογίστε το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου B ως προς το A σαν συνάρτηση του χρόνου.

(β) Σε ποια χρονική στιγμή η απόσταση μεταξύ των δύο σωματιδίων είναι η ελάχιστη δυνατή; Ποια είναι η θέση τους τότε;

Λύση:



Σχήμα 1.10

(α)

$$\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_{AB} = \boldsymbol{r}_B \Rightarrow \boldsymbol{r}_{AB} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A$$

$$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_A(0) + \boldsymbol{v}_A t = (x_{A0} + v_A t)\,\hat{\boldsymbol{x}}$$
$$\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{r}_B(0) + \boldsymbol{v}_B t = (y_{B0} + v_B t)\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$x_{A0} = -3 \text{ m}, \quad v_A = 2 \text{ m/sec}, \quad y_{B0} = -3 \text{ m}, \quad v_B = 3 \text{ m/sec}$$

$$\boldsymbol{r}_{AB}(t) = (-x_{A0}\hat{\boldsymbol{x}} + y_{B0}\hat{\boldsymbol{y}}) + (-v_A t\hat{\boldsymbol{x}} + v_B t\hat{\boldsymbol{y}})$$

(β) Απόσταση μεταξύ τους $= |\boldsymbol{r}_{AB}(t)|$

$$|\boldsymbol{r}_{AB}|^2 = (x_{A0} + v_A t)^2 + (y_{B0} + v_B t)^2 = A^2$$

Για το ακρότατο έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}A^2}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ με } A \neq 0$$

$$\frac{\mathrm{d}A^2}{\mathrm{d}t} = 2v_A\,(x_{A0} + v_A t) + 2v_B\,(y_{B0} + v_B t) = 0$$

Ακρότατα

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = 0 \Rightarrow \begin{cases} f''(t_0) > 0, & \text{ελάχιστο} \\ f''(t_0) < 0, & \text{μέγιστο} \end{cases}$$

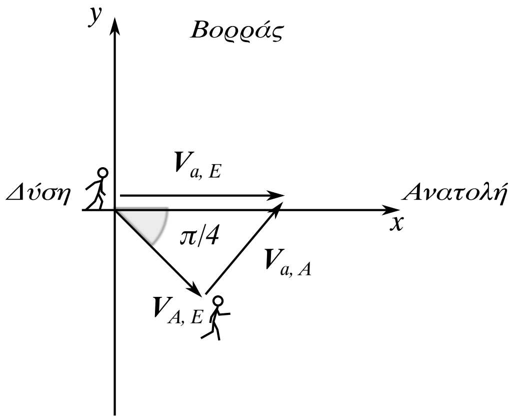
Πρόβλημα

(Σύνθεση ταχυτήτων) Ο πιλότος ενός αεροπλάνου πρέπει να διανύσει μια απόσταση 200 km προς τα ανατολικά. Από βορειοδυτικά φυσάει άνεμος με ταχύτητα 30 km/h. Υπολογίστε το διάνυσμα της ταχύτητας του αεροπλάνου ως προς τον άνεμο αν, σύμφωνα με το δρομολόγιο, το αεροπλάνο πρέπει να φτάσει στον προορισμό του σε 40 λεπτά.

Λύση:

Συμβολίζουμε με $\boldsymbol{V}_{a,E}$ την ταχύτητα του αεροπλάνου ως προς το έδαφος, με $\boldsymbol{V}_{A,E}$ την ταχύτητα του ανέμου ως προς έδαφος και με $\boldsymbol{V}_{a,A}$ την ταχύτητα του αεροπλάνου ως προς τον άνεμο. Έχουμε

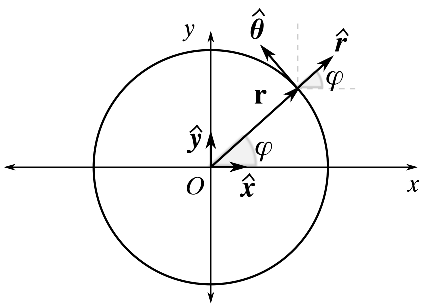
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{V}_{a,E} &= \boldsymbol{V}_{A,E} + \boldsymbol{V}_{a,A} \\
V_{a,E} &= \frac{200\text{ km}}{(2/3)\text{ h}} = 300\text{ km/h} \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{V}_{a,E} = V_{a,E}\hat{\boldsymbol{x}} \\
V_{A,E} &= 30\text{ km/h} \Rightarrow \boldsymbol{V}_{A,E} = V_{AE,x}\hat{\boldsymbol{x}} + V_{AE,y}\hat{\boldsymbol{y}} \\
V_{AE,x} &= V_{A,E}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 30\text{ kmh/h} \simeq 21\text{ km/h} \\
V_{AE,y} &= -V_{A,E}\sin\frac{\pi}{4} = -21\text{ km/h} \\
\boldsymbol{V}_{a,A} &= \boldsymbol{V}_{a,E} - \boldsymbol{V}_{A,E} = 300\text{ km/h}\hat{\boldsymbol{x}} - 21\text{ km/h}\hat{\boldsymbol{x}} + 21\text{ km/h}\hat{\boldsymbol{y}} \\
\boldsymbol{V}_{a,A} &= 279\text{ km/h}\hat{\boldsymbol{x}} + 21\text{ km/h}\hat{\boldsymbol{y}}
\end{aligned}
$$



1.9 Πολικές συντεταγμένες

Κινούμαστε στο επίπεδο (x, y)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} \\
\boldsymbol{r} &= r\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + r\sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} \\
\boldsymbol{r} &= r\hat{\boldsymbol{r}} \\
\hat{\boldsymbol{r}} &= \cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} \\
(x, y) &\to (r, \phi)
\end{aligned}
$$



$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \perp \hat{\boldsymbol{r}}, \qquad \left|\hat{\boldsymbol{\theta}}\right| = |\hat{\boldsymbol{r}}| = 1$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)\hat{\boldsymbol{y}} = -\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{y}}}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} \neq 0, \qquad \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\mathrm{d}t} \neq 0$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\cos\phi\hat{\boldsymbol{y}} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{r}}
\end{aligned}
$$

ταχύτητα $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r(t)\hat{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{r}} + r(t)\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} = r'\hat{\boldsymbol{r}} + r\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\theta}}$

επιτάχυνση $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = r''\hat{\boldsymbol{r}} + r'\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r'\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}\hat{\boldsymbol{\theta}} - r\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2\hat{\boldsymbol{r}}$

$$= \left[r'' - r\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\hat{\boldsymbol{r}} + \left[2r'\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

1.9.1 Κυκλική κίνηση

$$r(t) = R = \text{ σταθερό}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= R\hat{\boldsymbol{r}} \\
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r} &= R^2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{r} \\
\boldsymbol{a} &= -R\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2\hat{\boldsymbol{r}} + R\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}\hat{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned}$$

Εάν $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t = \text{σταθερό} = \omega$ τότε

$$\phi = \omega t + \phi_0 \Rightarrow \boldsymbol{v} = R\omega\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= -R\omega^2\hat{\boldsymbol{r}} = -\frac{v^2}{R}\hat{\boldsymbol{r}}, \quad \text{κεντρομόλος επιτάχυνση} \\
\boldsymbol{r} &= R\hat{\boldsymbol{r}} = R\left[\cos(\omega t + \phi_0)\,\hat{\boldsymbol{x}} + \sin(\omega t + \phi_0)\,\hat{\boldsymbol{y}}\right]
\end{aligned}$$

Έχουμε $\omega = 2\pi/T$, όπου T είναι η περίοδος, δηλαδή ο χρόνος για μια πλήρη περιστροφή κατά 2π. Για τη συχνότητα έχουμε

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\text{αριθμός στροφών}}{\text{ανά μονάδα χρόνου}} = \frac{\text{κύκλοι}}{sec} = \text{ Hertz}(Hz)$$

Συστήματα συντεταγμένων

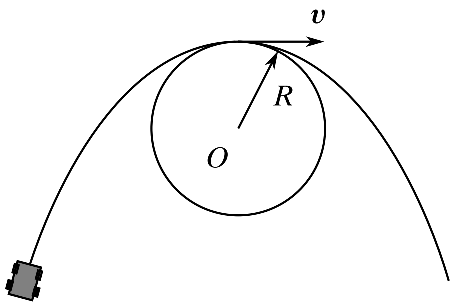
1. Καρτεσιανό (x, y, z)
2. Πολικό $(r, \phi) \equiv (x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi)$
3. Κυλινδρικό (r, ϕ, z)
4. Σφαιρικό $(r, \phi, \theta) \equiv (x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta)$

Εφαρμογή

Αυτοκίνητο εισέρχεται σε κυκλική στροφή ακτίνας 30 m. Εάν οι τροχοί μπορούν να αντισταθούν σε μέγιστη εγκάρσια επιτάχυνση 8 $\mathrm{m/sec^2}$ χωρίς να ολισθήσουν, ποια είναι η μέγιστη επιτρεπτή ταχύτητα;

$$\begin{aligned}
a &= \frac{v^2}{R} \Rightarrow v_{\max}^2 = a_{\max}R \\
&\Rightarrow v_{\max} = \sqrt{240}\ \mathrm{m/sec}
\end{aligned}$$

Κάθε καμπύλη τροχιά έχει τοπικά μια ακτίνα καμπυλότητας. Κλειστή στροφή συνεπάγεται μικρή ακτίνα



Σχήμα 1.11

καμπυλότητας και άρα μικρή ταχύτητα ολίσθησης, δηλαδή η μέγιστη επιτρεπτή ταχύτητα του κινητού στη στροφή είναι μικρή.

Εφαρμογή

Εξίσωση κίνησης ενός κινητού $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Ορίζουμε τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\boldsymbol{T}}$ και $\hat{\boldsymbol{N}}$, όπου $\hat{\boldsymbol{T}}$ είναι η εφαπτόμενη στην τροχιά κατά τη φορά της κίνησης και $\hat{\boldsymbol{N}}$ το κάθετο στο $\hat{\boldsymbol{T}}$ διάνυσμα, κατά τη φορά του $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{T}}/\mathrm{d}t$

$$\Rightarrow \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}|\hat{\boldsymbol{T}} = v\hat{\boldsymbol{T}}$$
$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{T}} + \frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{N}}$$

όπου

$$k = \frac{1}{\rho} = \left|\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{T}}}{\mathrm{d}s}\right|$$

Το s μετράει το μήκος της τροχιάς, k είναι η τοπική καμπυλότητα και ρ η τοπική ακτίνα καμπυλότητας.

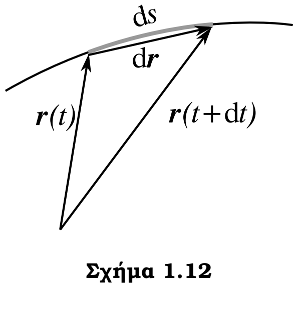
Λύση:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = |\boldsymbol{v}|\,\hat{\boldsymbol{T}}, \qquad \hat{\boldsymbol{T}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t|}$$
$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{T}} + v\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{T}}}{\mathrm{d}t}, \qquad \hat{\boldsymbol{T}}\perp\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{T}}}{\mathrm{d}t}$$

διότι $\qquad \hat{\boldsymbol{T}}\cdot\hat{\boldsymbol{T}} = 1 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{\boldsymbol{T}}\cdot\hat{\boldsymbol{T}}) = 0 \Rightarrow \hat{\boldsymbol{T}}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{T}}}{\mathrm{d}t} = 0$

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{T}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{T}}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{T}}}{\mathrm{d}s}$$
$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{T}} + v^2\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{T}}}{\mathrm{d}s}, \qquad \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{T}}}{\mathrm{d}s} = k\hat{\boldsymbol{N}}, \qquad \hat{\boldsymbol{N}} = \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{T}}/\mathrm{d}s}{\left|\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{T}}/\mathrm{d}s\right|}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{T}} + \frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{N}}$$
$$\text{όπου } \rho = \frac{1}{k}, \qquad k = \left|\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{T}}}{\mathrm{d}s}\right|$$

$$\boldsymbol{a}_{\text{επιτρόχιος}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{T}}$$
$$\boldsymbol{a}_{\text{κεντρομόλος}} = \frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{N}}$$



Σχήμα 1.12

Μήκος τροχιάς

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
\mathrm{d}s &= \sqrt{\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}} \\
\mathrm{d}s &= \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2} \\
\text{μέτρο της ταχύτητας} \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} = v
\end{aligned}
$$

1.10 Σειρές Taylor

Εφαρμογή του θεωρήματος της Μέσης Τιμής.
Ανάπτυξη συνεχούς και παραγωγίσιμης συνάρτησης σε σειρά κοντά στο σημείο x_0:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + R_n$$

$$\text{όπου} \quad R_n = f^{(n)}(\xi)\frac{(x-\xi)^n}{n!} \quad \text{και } \xi \text{ ανήκει στο διάστημα } x_0, x$$

εάν ισχύει $\lim R_n \to 0$ όταν $n \to \infty$ έχουμε:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

- $$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \\
(\mathrm{e}^x)' &= \mathrm{e}^x, \qquad (\mathrm{e}^x)'' = \mathrm{e}^x, \qquad \mathrm{e}^0 = 1
\end{aligned}
$$

- $$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{i\theta} &= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \ldots = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2} - \frac{i\theta^3}{6} + \frac{\theta^4}{24} + \ldots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \ldots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \ldots\right)
\end{aligned}
$$

- $$
\begin{aligned}
\cos\theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} + \ldots \\
(\cos\theta)' &= -\sin\theta, (\cos\theta)'' = -\cos\theta, \quad (\cos\theta)''' = \sin\theta \\
(\cos\theta)^{(4)} &= \cos\theta, \ldots \\
\sin\theta &= \theta - \frac{\theta^3}{6} + \ldots \\
(\sin\theta)' &= \cos\theta, \qquad (\sin\theta)'' = -\sin\theta, (\sin\theta)^{(3)} = -\cos\theta, \ldots \\
\Rightarrow \mathrm{e}^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{, Ταυτότητα του Euler}
\end{aligned}
$$

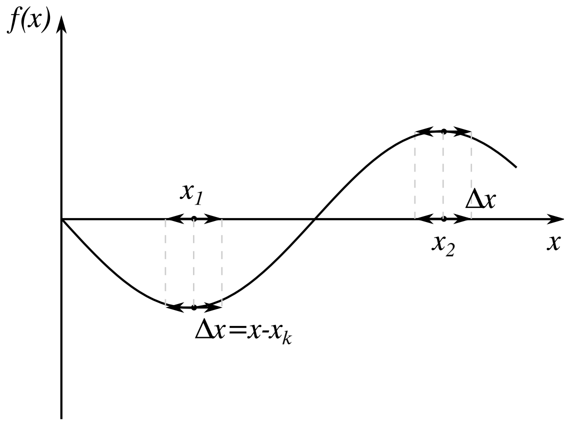
- $$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \ldots$$

  γύρω από το $x = 0$

  $$\left(\sqrt{t}\right)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}, \qquad \left(\sqrt{t}\right)'' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{t^{3/2}}, \qquad t = 1 + x$$

1.11 Ακρότατα Συνάρτησης

$$\begin{aligned} \text{ακρότατο} &\Rightarrow f'(x_k) = 0 \\ f''(x_k) > 0 &\Rightarrow \text{ ελάχιστο} \\ f''(x_k) < 0 &\Rightarrow \text{ μέγιστο} \end{aligned}$$



Σχήμα 1.13

Έστω ότι

$$f'(x_k) = 0$$

Ανάπτυξη σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο x_k

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)\,(x - x_k)^2 + \dots$$

$$f(x) = f(x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)\,(x - x_k)^2 + \dots$$

Το $\Delta x^2 = (x - x_k)^2$ είναι μικρός αριθμός ($\ll 1$), οι υπόλοιποι όροι είναι αμελητέοι .

$$\text{Εάν } f''(x_k) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_k) \Rightarrow \text{ το } x_k \text{ είναι μέγιστο}$$
$$\text{Εάν } f''(x_k) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_k) \Rightarrow \text{ το } x_k \text{ είναι ελάχιστο}$$

1.12 Απλές διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών

Παράδειγμα 1

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -kx, \qquad k \in \mathbb{R}^+,\ x = x_0 \text{ για } t = t_0$$

(α) Αναζητούμε τη συνάρτηση $x(t)$ έτσι ώστε η παράγωγος να δίνει την $x(t)$ επί μια σταθερά

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x(t) = A\mathrm{e}^{-kt} \\ &\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -kA\mathrm{e}^{-kt} = -kx \\ &x(t_0) = x_0 = A\mathrm{e}^{-kt_0} \Rightarrow A = x_0\mathrm{e}^{kt_0} \\ &\Rightarrow x(t) = x_0\mathrm{e}^{-k(t-t_0)} \end{aligned}$$

(β) $\mathrm{d}x = -kx\mathrm{d}t \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = -k\mathrm{d}t$ και ολοκληρώνουμε αριστερά κατά x, δεξιά κατά t

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = -k\int \mathrm{d}t + c \Rightarrow \ln x = -kt + c$$

$$x = \mathrm{e}^c\mathrm{e}^{-kt} = A\mathrm{e}^{-kt}$$

(γ)

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x'}{x'} = -k \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = -k(t-t_0)$$
$$\Rightarrow \frac{x}{x_0} = \mathrm{e}^{-k(t-t_0)} \Rightarrow x = x_0 \mathrm{e}^{-k(t-t_0)}$$

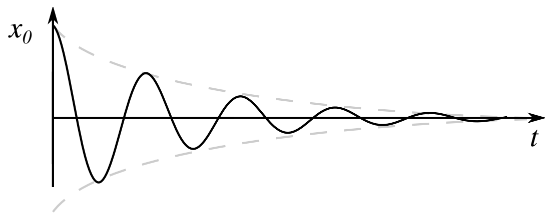
Παράδειγμα 2

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -kx, \qquad k \in \mathbb{C} \Rightarrow k = a + ib$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = -k\mathrm{d}t \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = -k\left(t - t_0\right)$$

Έστω $t_0 = 0, \quad x(0) = x_0$

$$x = x_0 \mathrm{e}^{-kt} = x_0 \mathrm{e}^{-at} \mathrm{e}^{ibt}$$
$$\Rightarrow x = x_0 \mathrm{e}^{-at} \cos(bt) + i x_0 \mathrm{e}^{-at} \sin(bt)$$

όπου $x \in \mathbb{C}$. Στο σχήμα 1.14 δίνουμε το πραγματικό μέρος του x σε συνάρτηση με το χρόνο t.



Σχήμα 1.14

Παράδειγμα 3

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + c$$
$$\ln y = \ln x + c \Rightarrow \ln \frac{y}{x} = c$$
$$\frac{y}{x} = c' \Rightarrow y = Ax$$

1.12.1 Γενικός κανόνας αντιμετώπισης των διαφορικών εξισώσεων χωριζόμενων μεταβλητών

(A)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1(x) f_2(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{f_2(y)} = \mathrm{d}x f_1(x)$$
$$\Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{f_2(y)} = \int f_1(x)\mathrm{d}x + c$$

Παράδειγμα 1

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$$

$$x\mathrm{d}x = -y\mathrm{d}y \Rightarrow \int x\mathrm{d}x = -\int y\mathrm{d}y + c$$
$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + c \Rightarrow x^2 + y^2 = 2c = R^2$$

Κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R.

Παράδειγμα 2

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4t\sqrt{x}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} &= 4t\mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 4\int t\mathrm{d}t + c \\
2\sqrt{x} &= \frac{4}{2}t^2 + c \Rightarrow \sqrt{x} = t^2 + c' \\
x &= \left(t^2 + c'\right)^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4t\sqrt{x} \text{ επαλήθευση}
\end{aligned}$$

Προσδιορίζουμε το c' από τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή $x(t_0) = x_0$.

(B)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax + by)$$

Ορίζουμε τη νέα μεταβλητή $z = ax + by$, οπότε $f(ax + by) = f(z)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a + bf(z) \\
&\Rightarrow \frac{\mathrm{d}z}{a + bf(z)} = \mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}z}{a + bf(z)} = \int \mathrm{d}x + c
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x + y, \qquad z = 2x + y$$

$$f(z) = z$$

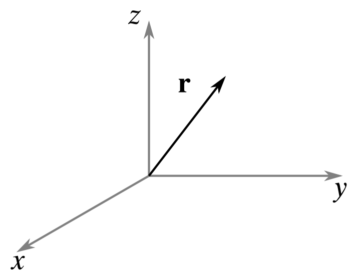
$$\frac{\mathrm{d}z}{2 + f(z)} = \mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}z}{2 + z} = x + c$$

$$\begin{aligned}
\ln(z + 2) &= x + c \\
z + 2 &= \mathrm{e}^{x+c} = A\mathrm{e}^x \\
2 + 2x + y &= A\mathrm{e}^x \\
y &= A\mathrm{e}^x - 2x - 2
\end{aligned}$$

Αρχικές συνθήκες

$$\begin{aligned}
x = 0 \Rightarrow y = y_0 \Rightarrow y_0 = A - 2 \\
\Rightarrow A = y_0 + 2
\end{aligned}$$

1.13 Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών - Μερική παράγωγος



Σχήμα 1.15

$$f = f(x, y, z)$$

Ορίζουμε την παράγωγο της f ως προς x από την οριακή διαδικασία

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

δηλαδή κρατώντας τις μεταβλητές y, z σταθερές.

Παράδειγμα 1

$$f(x, y, z) = 3x^2 y + \frac{y}{z} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 6xy$$

Ομοίως

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + \frac{1}{z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}$$

Κρατάω σταθερά τα x, y.

Παράδειγμα 2

$$|\boldsymbol{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{}} = \frac{x}{r}$$
$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$
$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

Κανόνες παραγώγισης

$$\text{Εάν } f(\boldsymbol{r}) = g(\boldsymbol{r}) + h(\boldsymbol{r})$$
$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(g \cdot h) = g \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial g}{\partial x}$$
$$\text{Γενικός κανόνας:} \ \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$$

Ολική μεταβολή $\mathrm{d}f$ **της συνάρτησης** f

$$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$\mathrm{d}f = f(\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}) - f(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$
$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{x}}\mathrm{d}x + \hat{\boldsymbol{y}}\mathrm{d}y + \hat{\boldsymbol{z}}\mathrm{d}z$$

Ορίζουμε το διάνυσμα

$$\boldsymbol{\nabla} f = \hat{\boldsymbol{x}} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}} \frac{\partial f}{\partial z} \qquad \text{(κλίση της } f\text{)}$$
$$\Rightarrow \mathrm{d}f = (\boldsymbol{\nabla} f) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$