

Διατήρηση της Ενέργειας

① Διατηρητικές Δυνάμεις

Για να ορίσουμε τις Μηχανικά Ενέργεια χρειάζονται
 την εννοία της Δυναμικής Ενέργειας οπότε
 πρέπει να ορίσουμε ποιας Δυνάμεις είναι Διατηρητικές

Για ένα σωματίδιο που κινείται από την θέση $P_1 \rightarrow P_2$
 ο ρόλος της επίδρασης μιας δύναμης που δεν εξαρτάται
 από την ταχύτητα του σωματίου ή ριζα από τον
 χρόνο μπορούμε να πούμε για το εν λόγω δύναμη
 είναι Διατηρητική ή όχι.

$$W_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

η δύναμη είναι Διατηρητική εάν το W_{12} δεν εξαρτάται
 από την διαδρομή που ενώνει τα σημεία P_1 και P_2 είναι
 δυνατόν να ορίσουμε τις διαδρομές $P_1 \rightarrow P_2$

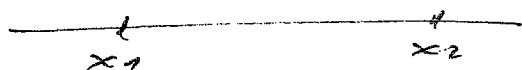
επομένως $W_{12} = -W_{2,1} \Rightarrow$

το εφόσον μια κλειστή διαδρομή $P_1 \rightarrow P_1$ είναι
 μηδέν για ένα Διατηρητικό πεδίο Δυνάμεων.

Ποτελεσματικότητες Διατηρ. Δυνάμεων

Σταθερά κορυφών T_i .

Ελατήριο

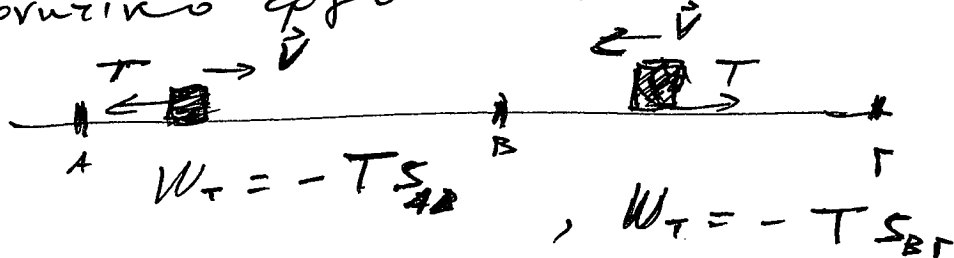


Μονοδιαστατική κίνηση.

μη διατηρητική δύναμη:

(2)

Τριβή στον μακροσκοπικό δρόμο, παράγει αρνητικό έργο όπως και αν κινηθεί το σώμα.



Μικροσκοπικά παύσε έναν κυλιόμενο δρόμο το σώμα δεν επανέρχεται στην ίδια κατάσταση.

(2) Δυναμική Ενέργεια

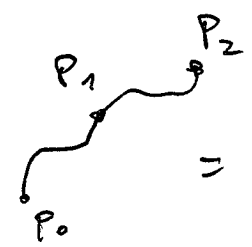
Έστω το πεδίο δυνάμεων διατηρητικό, διαλεγούμε ένα σημείο P_0 στον χώρο αναφοράς (συνήθως αρχή των αξόνων, στο άπειρο, εκεί που οι δυνάμεις μηδενίζονται, κάποιο αυθαίρετο σημείο) και ορίζουμε εκεί ότι $U(P_0) = 0$ (η και αλλιώς αυθαίρετα επέλεγμε):

$$\Rightarrow U(P) = - \int_{P_0}^P \vec{F} \cdot d\vec{r} + U(P_0)$$

και υπολογίζουμε το ελάχιστο καταμνηστικό οποιοδήποτε συγκεκριμένου δρόμου.

Κρατώντας το P_0 σταθερό $\Rightarrow U(P)$ είναι συνάρτηση μόνο των ανω ορίων P .

$$\Rightarrow U(P_2) - U(P_1) = - \int_{P_0}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W_{P_1 \rightarrow P_2}$$



$$\Rightarrow W_{P_1 \rightarrow P_2}^F = U(P_1) - U(P_2)$$

$$U(P_1) - U(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Από το προηγούμενο κεφάλαιο $W_{1 \rightarrow 2}^F = \Delta K = K_2 - K_1$

$$\Rightarrow U(P_1) - U(P_2) = K_2 - K_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_1 + U(P_1) = K_2 + U(P_2)$$

Η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή

Παραδείγματα

(A) Πεδίο βαρύτητας ως προς κοίτη οριζ. Γ₀:
 $P_0 = \text{αρχή των αξόνων} \Rightarrow U(z) = mgz$

(B) Ελατήριο: $P_0 = (x=0) \Rightarrow U(x=0) = 0$
 $\Rightarrow U(x) = - \int_0^x F(x) dx = - \int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2} k x^2$

(Γ) Δύναμη $F(x) = -\frac{A}{x^2}$, $P_0 = \infty$, $U(x=\infty) = 0$

$$U(x) = - \int_{\infty}^x F(w) dw = + \int_{\infty}^x \left(+\frac{A}{w^2} \right) dw = -\frac{A}{w} \Big|_{\infty}^x = -\frac{A}{x}$$

$$\Rightarrow U(x) = -\frac{A}{x}$$

Δ) Πεδίο Βαρύτητας της Γης μακριά από (4)
της Γη

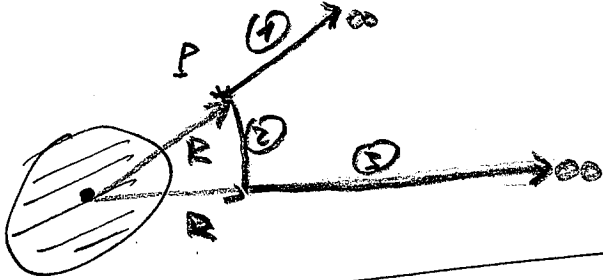
$$\vec{F} = -\frac{MmG}{r^2} \hat{r} \quad , \quad \text{το πεδίο είναι διατηρητικό}$$

$P_0 = \infty$, (Η μάζα της εκτείνεται μέχρι το απείρο)

$$U(\vec{r} = \infty) = 0$$

$$U(\vec{R}) = - \int_{\infty}^R \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^R \left(-\frac{GMm}{r^2} \right) dr = -\frac{GMm}{R}$$

οι διαδρομές ① και ②+③
 είναι ισοδύναμες



Εάν έχουμε διατηρητικές \vec{F} δυνάμεις και με
 διατηρητικές \vec{T} δυνάμεις τότε:

$$W_{1 \rightarrow 2}^F + W_{1 \rightarrow 2}^T = \Delta K \Rightarrow U(1) - U(2) + W_{1 \rightarrow 2}^T = \Delta K$$

$$\Rightarrow W_{1 \rightarrow 2}^T = \Delta K + \Delta U$$

where $\Delta K = K_2 - K_1$, $\Delta U = U(2) - U(1)$

Derivativ Ereyana ano to ASD lo lapdno
koru oar P_h:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{R+h} = -\frac{GMm}{R} \frac{1}{1+\frac{h}{R}} =$$

$$= -\frac{GMm}{R} \left(1 - \frac{h}{R} + \left(\frac{h}{R}\right)^2 + \dots \right)$$

$$= -\frac{GMm}{R} + \frac{GMm}{R^2} h + \dots$$

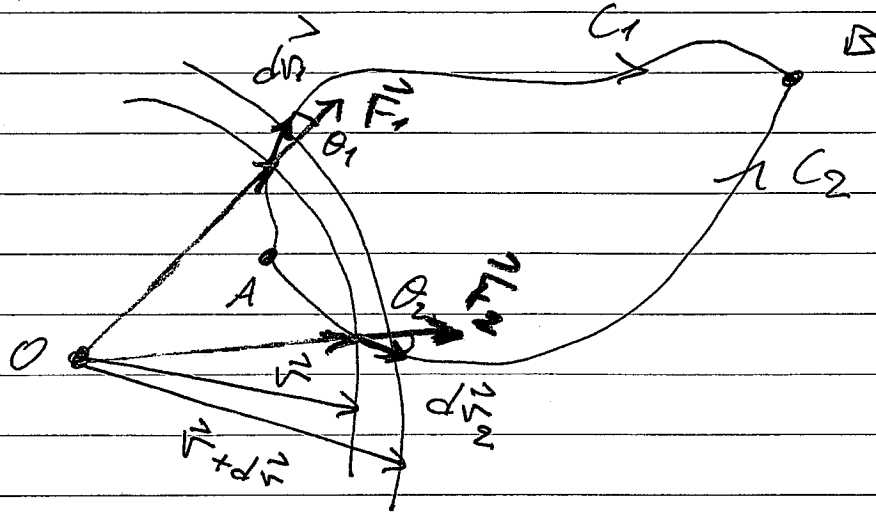
$$U(h) = \frac{GM}{R^2} mh = mgh$$

propiza piro pertaboyas ano Derivativ
ano Derivativ Ereyana

$$U(R+h) = U(R) + \frac{GMm}{R^2} h$$

$$U(h) = U(R+h) - U(R) = \frac{GM}{R^2} mh$$

Οι κεντρικές Δυνάμεις $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{r}$ (4/15)
 είναι Διατηρητικές (α.χ. Δύναμη Βαρύτητας)



$$W_{C1} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad , \quad W_{C2} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Χωρίζουμε τις δύο δρόμους C_1 και C_2 σε μικρά κομμάτια παίρνουμε απόκλιση σε γαίες ακτίνας \vec{r} και $\vec{r} + d\vec{r}$:

$$dW_1 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{s}_1 = F(r) dr_1 \cos\theta_1 = F(r) dr$$

$$dW_2 = \vec{F}_2 \cdot d\vec{s}_2 = F(r) dr_2 \cos\theta_2 = F(r) dr$$

$\Rightarrow dW_1 = dW_2$ για κάθε τέτοια στοιχειώδη διαδρομή.

$$\text{Συνολικά } W_{C1} = \sum dW = W_{C2}$$

\Rightarrow Το έργο από το σημείο A ως το B είναι το ίδιο για κάθε διαδρομή \Rightarrow

\Rightarrow η δύναμη είναι συντηρητική.

$dr_1 \cos\theta_1 =$ προβολή του $d\vec{r}_1$ στον ακτίνα $= dr$.

3) Χρονοχρονισμός Δυναμισμού και
Δυναμική Ενέργεια

Είδουμε ότι: $\Delta U = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(P_2) - U(P_1)$

για μια αρεπότητα με ακίνητο ποιο \rightarrow

$\Rightarrow dU = - \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$\Rightarrow dU = - F_x dx - F_y dy - F_z dz$

Εάν έχουμε μια μονοδιάστατη κίνηση ποιο

$\Rightarrow U = U(x) \Rightarrow dU = \frac{dU}{dx} dx = - F_x dx$

$\Rightarrow F_x = - \frac{dU}{dx}$

Παράδειγμα: Ελατήριο, $U(x) = \frac{1}{2} kx^2 \Rightarrow F(x) = -kx$

Για τις τρεις διαστάσεις $U = U(x, y, z)$
για μια τριτοσ συνάρτηση έχουμε τίν μερική παράγωγο
και το ολικό διαφορικό της $U \rightarrow$

$\Rightarrow dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \Rightarrow$

$\Rightarrow F_x = - \frac{\partial U}{\partial x}, F_y = - \frac{\partial U}{\partial y}, F_z = - \frac{\partial U}{\partial z}$

Παράδειγμα: $U = - \frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Rightarrow \vec{F} = - \frac{GMm}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \hat{r}$

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{dU}{dr} \frac{dr}{dx} = -\frac{dU}{dr} \frac{\sqrt{x^2+z^2}}{x}$$

$$= -\frac{dU}{dr} \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2+z^2}} = -\frac{dU}{dr} \frac{x}{r}$$

$$F_x = -\frac{dU}{dr} \frac{x}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{dr} = \frac{GMm}{r^2}$$

$$F_z = -\frac{dU}{dr} \frac{z}{r}$$

$$\vec{F} = \hat{x} F_x + \hat{y} F_y + \hat{z} F_z = -\frac{GMm}{r^2} \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{r}$$

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

Γενικό Αποτέλεσμα

Εάν $U = U(r)$, $r = |\vec{r}|$

τότε $\vec{F} = -\frac{dU}{dr} \hat{r}$

ορίζουμε: $\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{d}{dx} + \hat{y} \frac{d}{dy} + \hat{z} \frac{d}{dz}$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\hat{x} \frac{dU}{dx} - \hat{y} \frac{dU}{dy} - \hat{z} \frac{dU}{dz}$$

και $dU = \vec{\nabla} U \cdot d\vec{r}$

Τοπικό Κριτήριο για τις Διατηρητικές Δυνάμεις.

Ένας τύπος το κριτήριο για το εάν μια δύναμη ήταν συντηρητική - διατηρητική ήταν ότι το έργο της δύναμης σε κάθε διαδρομή από το $A \rightarrow B$ είναι το ίδιο. Δηλαδή το έργο από το $A \rightarrow A$ είναι μηδέν.

$$\int_{A \rightarrow A}^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A \rightarrow C_1}^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \oint_{A \rightarrow A} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Αν το κριτήριο για τον έλεγχο μιας δύναμης δύσκολα εφαρμόζεται.

Υπάρχει ένα ισόδυναμο (τοπικό) κριτήριο που αποζητεί αναγκαία και ικανά συνθήκες για τις διατηρητικές δυνάμεις:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad (\text{curl } \vec{F} = 0 \text{ διαβάσεται})$$

για κάθε σημείο στον χώρο

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{x} \left(\frac{dF_z}{dz} - \frac{dF_y}{dy} \right) + \hat{y} \left(\frac{dF_x}{dz} - \frac{dF_z}{dx} \right) + \hat{z} \left(\frac{dF_x}{dy} - \frac{dF_y}{dx} \right)$$

Εάν η δύναμη είναι συντηρητική τότε

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U = 0$$

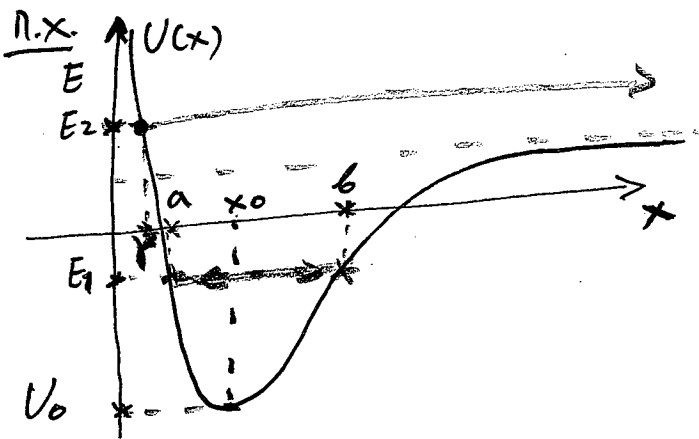
όπως μπορείτε εύκολα να δείτε κάνοντας τις παραγωγισίες.

4) Δυναμική Ενέργεια και Σημεία ισορροπίας (6)
Δέσμιες τροχιές, σημεία ισορροπίας

Θα μιλήσουμε για μια δόνηση

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + U(x) = \text{σταθερή}$$

ο σχεδίασμα του καμπύλου δυναμικής Ενέργειας



Εάν το σώμα έχει ενέργεια E_1 , τότε ακινοποιείται

υποχρεωτικά ανάμεσα στα σημεία a και b που είναι

σημεία ισορροπίας

$$(v=0), E = U(a) = U(b)$$

και τροχιές λέγεται δέσμια.

Εάν $E = U_0 \Rightarrow v = 0$ ορατό σώμα ακινοποιείται

σε κατάσταση ενοταδού ισορροπίας:

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_0} = 0, \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0} > 0$$

(Για μικρές ταλαντώσεις γύρω από τον ενοταδού ισορροπίας)

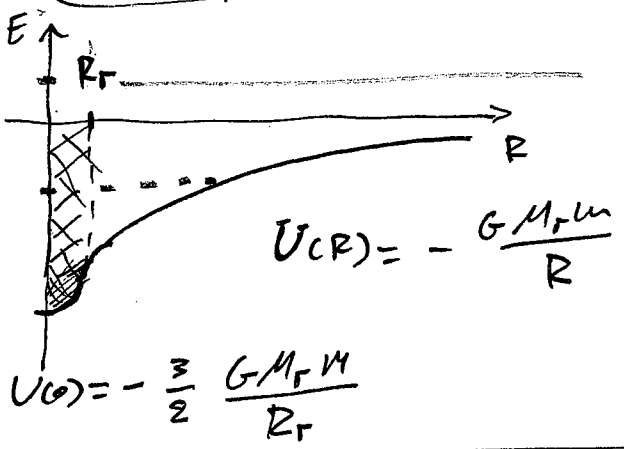
Εάν $E = E_2 \Rightarrow$ το σώμα μπερδεύει κινείται από το σημείο γ έως το α ή ερ 0, μη δέσμια τροχιά.

και για κάθε θέση του σώματος έχουμε:

$$v^2 = \frac{2}{m} [E - U(x)] \geq 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}$$

Πεδίο βαρύτητας Γης:

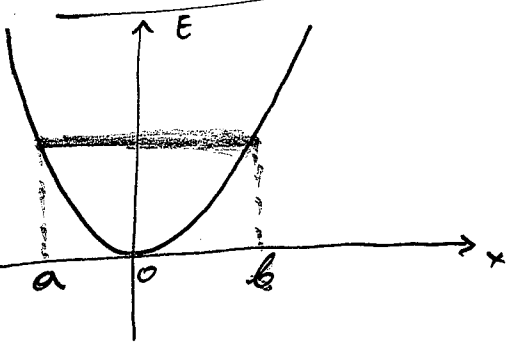


για $R < R_r$ η δυναμική ενέργεια ακολουθεί έναν αγνό τύπο:

$$U(R) = -\frac{1}{2} \frac{GM_r M}{R_r} \left(3 - \frac{R^2}{R_r^2} \right)$$

(Τελειακή Παράφραση)

Ελατήρια:



Περιοδική κίνηση αναγνώσας σε σπρίνγκ α καλώ, ταράτσου

$$v^2 = \frac{2}{m} [E - U(x)]$$

$$E = \frac{1}{2} k a^2 = \frac{1}{2} k b^2 \Rightarrow |a| = |b|$$

Κάπως κινείται από το $0 \rightarrow b$ το σώμα επιβραδύνεται η ταχύτητα μικραίνει η δυναμική ενέργεια μεγαλώνει, καθώς κινείται από το $b \rightarrow 0$ η ταχύτητα μεγαλώνει η δυναμ. ενέργεια μικραίνει.

5) Θερμότητα και Ισχύς

Θερμότητα \rightarrow Μακροσκοπικά με σ_{μ} η μορφή ενέργειας \rightarrow μη διατηρητικές δυνάμεις \rightarrow Μικροσκοπικά έχουν κινητική και δυναμική ενέργεια.

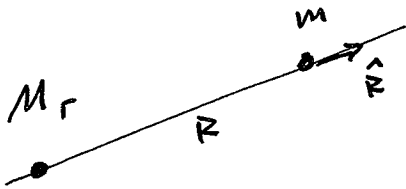
Ισχύς Δύναμεις $\Rightarrow P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

1 Watt = 1 $\frac{J}{s}$, 1hp = 745,4 W

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

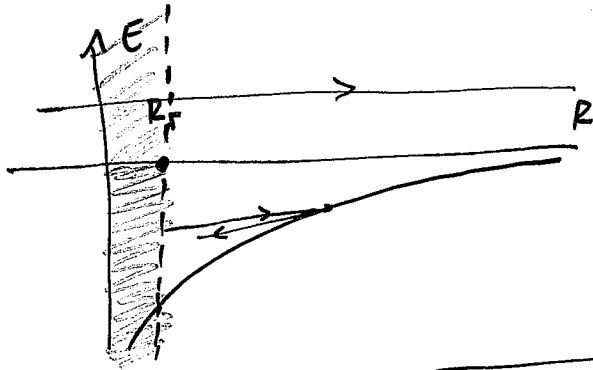
6) Πρώτο θεώρημα της Γραμμής

5



$$\vec{F} = - \frac{G M_r m}{R^2} \hat{R}$$

$$V(R) = - \frac{G M_r m}{R}$$



Διατήρηση Μηχανικής Ενέργειας

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{R} = \text{σταθερό} = E$$

Ταχύτητα Διαφυγής:

$$E(\text{στη Γραμμή}) = E(\text{σε άπειρο})$$

$$\frac{1}{2} m v_r^2 - \frac{G M_r m}{R_r} = \frac{1}{2} m v_{\infty}^2 \Rightarrow \text{εάν } v_{\infty}^2 = 0$$

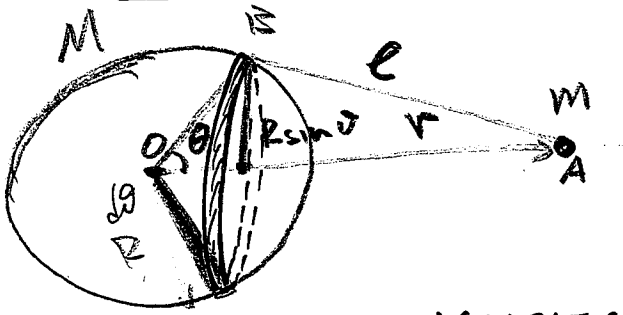
$$\text{τότε } \frac{1}{2} m v_r^2 = \frac{G M_r m}{R_r} \Rightarrow \boxed{v_r^2 = \frac{2 G M_r}{R_r}}$$

Εργασία Στροφής σε κεντρική κίνηση γρω άποτη Γη

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{1}{2} M_{\Sigma} v^2 - \frac{G M_r M_{\Sigma}}{R} \\ \frac{G M_r M_{\Sigma}}{R^2} &= M_{\Sigma} \frac{v^2}{R} \end{aligned} \right\} \Rightarrow E = - \frac{1}{2} G \frac{M_r M_{\Sigma}}{R} \quad \text{LO}$$

④ Πεδίο βαρύτητας Σφαιρικού υφους

⑤



ομοια μάζα σφαιρικού υφους
 ισου με M ορα
 επιφανειακη πυκνοτητα = $\frac{M}{4\pi R^2}$

Χωριζουμε τον σφαιρικο υφου σε δακτυδια
 με επιπεδο καθετο στον γραμμικο OA.

$$\Rightarrow \Delta M(\theta) = \frac{M}{4\pi R^2} (2\pi R \sin\theta) (R d\theta) = \frac{M}{4\pi R^2} 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{\text{δακτ}} = \frac{M}{2} \sin\theta d\theta$$

$$\text{κα } dW = -G \frac{dM m}{l} = -G \frac{M m}{2} \frac{\sin\theta d\theta}{l}$$

$$\Rightarrow U = -G \frac{M m}{2} \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{l} = \sum \text{δυναμικων ενεργειων απο καθε δακτυδι. δακτυδια}$$

$$l^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos\theta \Rightarrow l dl = r R \sin\theta d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dl}{Rr} = \frac{r R \sin\theta d\theta}{l} \quad \left| \begin{array}{l} \theta=0 \Rightarrow l = r - R \\ \theta=\pi \Rightarrow l = r + R \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow U = -G M m \frac{1}{2 R r} \int_{r-R}^{r+R} dl = -G M m \frac{1}{2 R r} (r+R - (r-R))$$

$$\Rightarrow \boxed{U = -G M m \frac{1}{2 R r} 2R = -\frac{G M m}{r} \quad \underline{r > R}}$$

εαν η μάζα μετα στον υφου $\Rightarrow \int_{r-R}^{r+R} dl = 2r$

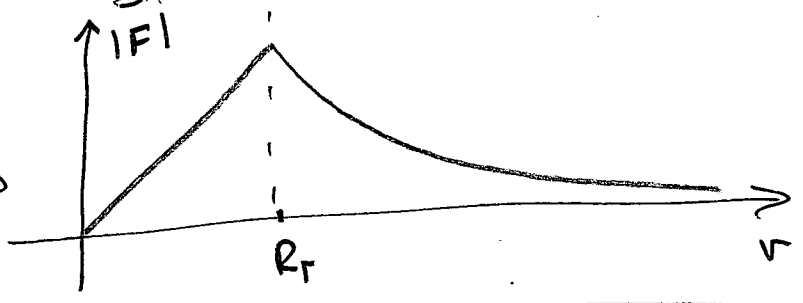
$$\Rightarrow \boxed{U = -\frac{G M m}{r} = \text{σταθην για καθε } r \quad \underline{r < R}}$$

⇒ σε μια μάζα μέσα σε ένα δέλεμα κενό (90)
 δέλεμα, $F = -\frac{dU}{dr} = 0$.

Εάν λοιπόν θύγαμε να υπολογίσουμε το δέλεμα
 της Γης σε μια μάζα μέσα σε ένα κενό δέλεμα
 της Γης σε δύο ~~συντηγές~~ συμπτώσεις ψ οι οποίες είναι
 με ακτίνα $(0, r)$ και εσωτερική ακτίνα $(0, R_T)$
 ο εξω περινοσ άσκα δέλεμα μόνον σε m .
 Ενώ για το εσω περινοσ έχουμε:

$$F = -G \frac{M(r)M}{r^2} = -G \frac{M_T}{R_T^3} \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{M}{r}$$

⇒ $F = -\frac{GM_T M}{R_T^3} r$



$$\vec{F} = -\frac{dU}{dr} \hat{r}$$

$$U(R) = -\int_{\infty}^R \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{R_T} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{R_T}^R \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{GM_T M}{R_T} - \int_{R_T}^R \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= -\frac{GM_T M}{R_T} - \int_{R_T}^R \left(-\frac{GM_T M}{R_T^3} r\right) dr = \dots$$

$$= -\frac{3}{2} \frac{GM_T M}{R_T} + \frac{GM_T M}{R_T^3} \frac{R^2}{2}$$

$R = \text{απόσταση από το κέντρο της Γης.}$