

Έργο και Ενέργεια

① Νόμοι Διατήρησης \leftrightarrow Συμπεριφορά στην μηχανική
 \rightarrow Απορρομήσεις σε εξισώσεις κίνησης

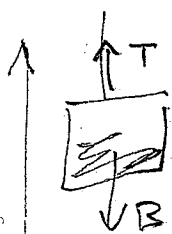
Έργο σε μια Δ κατάσταση
 το έργο μια δύναμης F_x σε κίνηση στην
 μια Δ κατάσταση ορίζεται ως:
 $W = F_x \Delta x \Leftrightarrow$ Έργο Δύναμης = Δύναμη * Μετατόνιση

$W > 0$ εάν $F_x, \Delta x$ ομόσημα

$W < 0$ εάν $F_x, \Delta x$ αντίσημα

Μονάδες $1 \text{ Joule} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$

π.χ ① Αντικείμενο μάζας M ανεβαίνει οριζόντια



$$W_B = -B \cdot h, \quad W_T = T \cdot h$$

$$B = T \Rightarrow W_T = -W_B$$

Εάν δώσουμε οριζόντια κίνηση τότε:

$$T - B = Ma \Rightarrow W_T = T \cdot h > |W_B| = B \cdot h$$

Απόψεις ακίνητο σ' ένα κρυστάλλο ένα βάρος δw ε
 παράγει έργο, αν και καταναλώνεται ενέργεια
 στους μύς για να κρατήσει το βάρος.

Αν ο άνθρωπος είναι μέσα σε ανεγκλωπίδα που κινείται
 οριζόντια προς τα επάνω τότε για έναν παρατηρητή
 εκτός ανεγκλωπίδα δίνεται έργο στο "βάρος" για να
 μετακινηθεί προς τα επάνω.

Αν η δύναμη είναι μέσα βυστή:

$$F = F(x)$$

τότε χωρίζουμε το διάστημα μετακίνησης σε μικρά
 τμήματα και υποθέτουμε την δύναμη σταθερή σε
 αυτά τα μικρά διαστήματα:

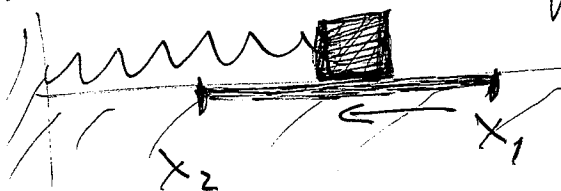
$$W_{\text{ολικό}} = \sum_k \Delta W_k = \sum_{k=1}^N F(x_k) \Delta x_k$$

και παίρνουμε την διαίρεση $N \rightarrow \infty, |\Delta x_k| \rightarrow 0$

$$\Rightarrow W_{\text{ολικό}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N F(x_k) \Delta x_k = \int_a^b F(x) dx$$

Παράδειγμα: Ελατήριο ασκή δύναμη $F(x) = -kx$ σε
 οριζόντιο που κινείται από $x_1 = a \rightarrow x_2 = b$
 ποιο είναι το έργο της δύναμης του ελατηρίου που
 προσφέρεται στο σώμα?

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = -\frac{k}{2} (x_2^2 - x_1^2)$$

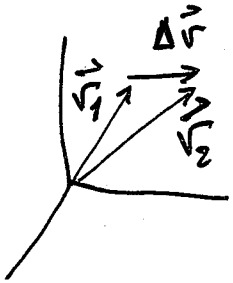


$$W = \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k x_2^2$$

2) Έργο Δύναμης στον Χώρο

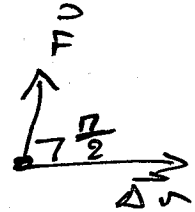
3

$$\delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \Delta r \cos \theta$$

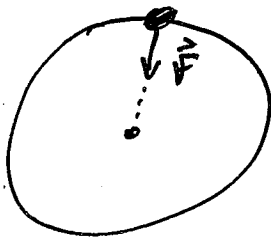


$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta \vec{r}$$

Εάν $\vec{F} \perp \Delta \vec{r} \Rightarrow \delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = 0$



π.κ. κυκλική κίνηση, κεντρομόλος > Δύναμη



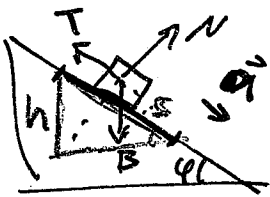
$$\vec{F} = m \vec{a}_c$$

$$\text{Έργο } F = 0$$

Διότι $\vec{F} \perp \mu\epsilon\tau\alpha\sigma\tau\iota\sigma\iota\sigma\eta$

π.κ. ομοθρονό σύστημα σε κυκλικό επίπεδο

$$\text{Έργο αντίδρασης} = 0$$



$$W_N = 0, W_T = -T \cdot s$$

$$W_B = B \sin \varphi \cdot s = B \cdot h = B \cdot s \cdot \sin(\frac{\rho}{2} - \varphi)$$

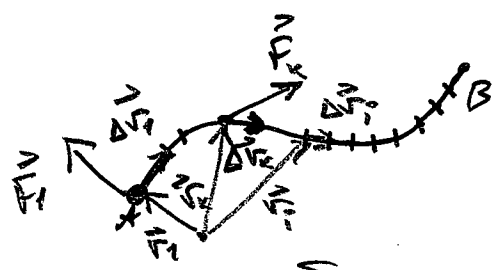
$$\left\{ \begin{array}{l} B \sin \varphi - T = m a \\ B \cos \varphi = N \\ T = \mu N \end{array} \right.$$

$$\vec{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z}$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta x \hat{x} + \hat{y} \Delta y + \hat{z} \Delta z$$

$$\Rightarrow \Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$$

Εργο (Μεταβλητός Δυναμικός) όταν το σώμα κινείται από την θέση Α στην θέση Β.



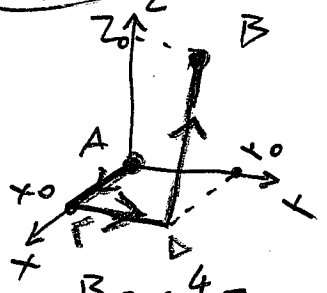
Χωρίζουμε τον Δρόμο A → B σε μικρά ευθύγραμμα τμήματα $\Delta \vec{r}_k$ με $k=1, \dots, N$ υπολογίζουμε το έργο της δύναμης χίλια σε κάθε τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα $\Rightarrow \Delta W_k = F(\vec{r}_k) \cdot \Delta \vec{r}_k$

$$\Rightarrow W_{A \rightarrow B} = \sum_{k=1}^N F(\vec{r}_k) \cdot \Delta \vec{r}_k = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

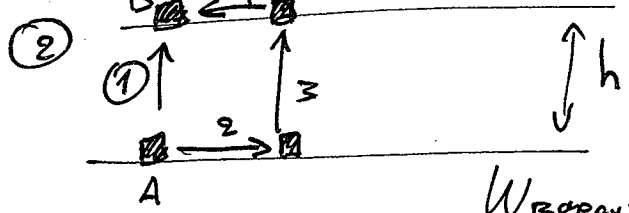
$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

Παράδειγμα

① $\vec{F} = \hat{x} [ax(x^2 - 3z^2)] + \hat{y} [3ax(x^2 - z^2)] + \hat{z} [-6axxz]$



$$W_{A \rightarrow B} = 0 + ax_0 x_0^3 - 3ax_0 x_0 z_0^2$$

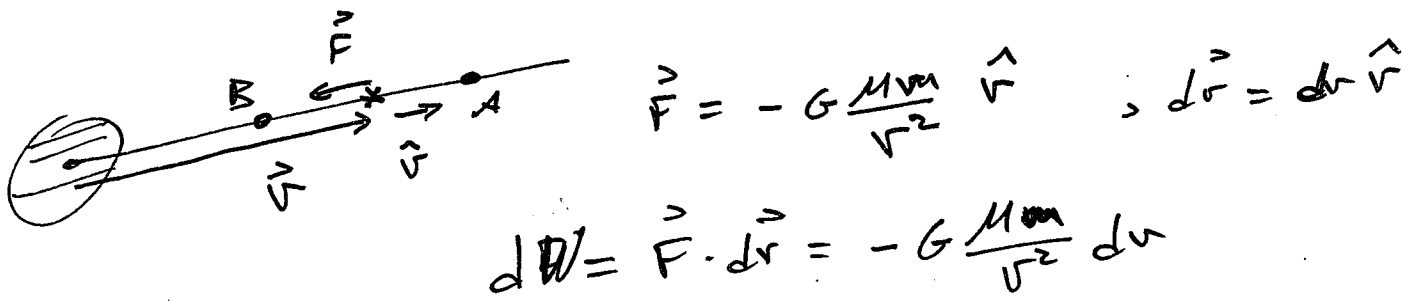


$$W_{A \rightarrow B} = -mgh$$

$$\vec{F} = \vec{F} = -mg \hat{z}$$

$W_{B \rightarrow A}$ ανεξάρτητο της τροχιάς A → B

③ Πύση στο πδίο βαρύτητας μακρά από τω Γη, Ακτινική κίνηση ⑤



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -G \frac{Mm}{r^2} dr$$

$$\Rightarrow W_{A \rightarrow B} = \int_A^B dW = \int_{r_A}^{r_B} (-G M m) \frac{dr}{r^2} = (-G M m) \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_A}^{r_B}$$

$$W_{A \rightarrow B} = \frac{G M m}{r_B} - \frac{G M m}{r_A} > 0$$

Το σύστημα κερδίζει ενέργεια.

③ Κινητική Ενέργεια - Έργο Δύναμης

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \\ &= \int_A^B m \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} dt = \int_A^B m \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} m \int_A^B dU^2 \quad (\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} dU^2) \\ &= \frac{1}{2} m \int_A^B \frac{dU^2}{dt} dt = \frac{1}{2} m (U_B^2 - U_A^2) = \frac{1}{2} m U_B^2 - \frac{1}{2} m U_A^2 \end{aligned}$$

ορίζουμε Κινητική Ενέργεια $K = \frac{1}{2} m U^2$

$$\Rightarrow W_{A \rightarrow B} = \Delta K \quad \Delta K = K_B - K_A$$

Εάν $W_{A \rightarrow B} > 0 \Rightarrow \Delta K > 0 \Rightarrow K_B > K_A$

Η δύναμη παράγει έργο \Rightarrow αρα αυξάνεται η κινητική ενέργεια του συστήματος

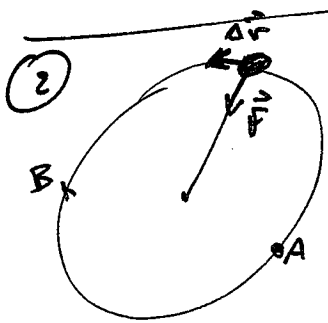
Παράδειγμα ① Έργο ομογενούς δύναμης:

⑥

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} \Rightarrow v(t) = at + v_0$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t = \frac{1}{2}m v_0^2$$

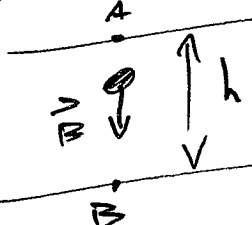
$$\Rightarrow W_{A \rightarrow B}^F = F \cdot \Delta x = ma \cdot \Delta x = \frac{1}{2}ma^2t^2 + \frac{1}{2}mav_0t = \frac{1}{2}m(at + v_0)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \Delta K$$



$$\Rightarrow W_{A \rightarrow B}^F = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta K = \frac{1}{2}m v_B^2 - \frac{1}{2}m v_A^2$$

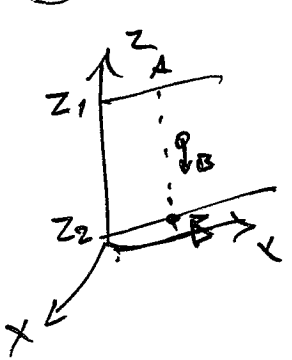
$$\text{για } W_{A \rightarrow B}^F = 0 \Rightarrow \Delta K = 0 \Rightarrow v_B^2 = v_A^2$$

③ Παράδειγμα κίνησης στην Γη:



$$W_{A \rightarrow B} = mgh \quad \Delta K = \frac{1}{2}m v_B^2 \quad \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}m v_B^2$$

④ Δυναμική Έρευνα Παράδειγμα



$$W_{A \rightarrow B} = mg(z_1 - z_2) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{z_1}^{z_2} (-mg\hat{z}) \cdot (dz\hat{z}) = \int_{z_1}^{z_2} (-mg) dz = -mgz \Big|_{z_1}^{z_2} = -mgz_2 + mgz_1$$

Όπως και οι κινήσεις το σωμα ανάμεσα στα δύο σημεία A και B $\Rightarrow W_{A \rightarrow B} = mgz_1 - mgz_2$

$$\Rightarrow W_{A \rightarrow B} = \Delta K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m g z_1 - m g z_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} m v_1^2 + m g z_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + m g z_2}$$

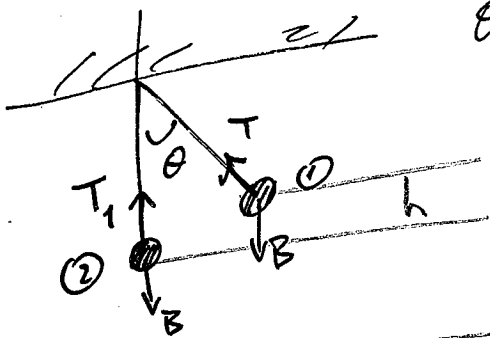
Θεώρημα Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + m g z = \text{σταθερό}$$

Ορισμός Δυναμικής Ενέργειας

$$U(z) = m g z \quad \text{εάν} \quad U(z=0) = 0.$$

Παράδειγμα ένα εκκρεμές αποτελείται από μάζα M συνδεδεμένη σε νήμα μήκους l . Το εκκρεμές κρατάται οριζόντια σε γωνία θ ως προς την κατακόρυφο. Εάν το εκκρεμές αφήσει ελεύθερο, ποσα είναι η ταχύτητα του νήματος όταν το εκκρεμές διασχίσει αργότερα την κατακόρυφο;



Θέση ①

$$E_1 = 0 + m g h$$

Θέση ②

$$E_2 = \frac{1}{2} m v^2 + 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} m v^2 = m g h}$$

$$\boxed{h = l - l \cos \theta = l(1 - \cos \theta)}$$

στη θέση ② $\boxed{T_1 - B = m \frac{v^2}{l}}$

το ερξο \Rightarrow ταχύτητα του νήματος είναι μηδέν.

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g l (1 - \cos \theta) \Rightarrow \frac{v^2}{l} = 2g(1 - \cos \theta)$$

$$T_1 - B = 2m g (1 - \cos \theta)$$