

Μετασχηματισμός του Lorentz

① Βασικές Παράδοξεις

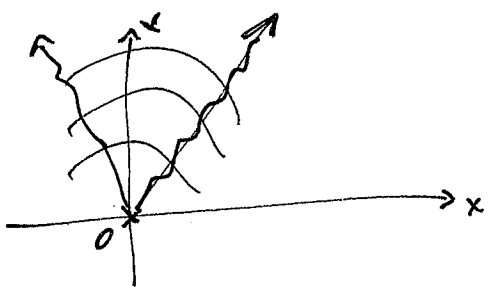
- α) Η ταχύτητα διάδοσης του φωτός (στο κενό) είναι ανεξάρτητη από την κίνηση των φωτεινών σωμάτων ή του δέκτη.
- β) Ο χώρος είναι ισότροπος και ομοόμορφος. Ο θεμελιώδης νόμος της φυσικής είναι ίδιος για δύο οποιοδήποτε παρατηρητές που βρίσκονται σε ομοόμορφη σχετική κίνηση.

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ή τα φωτόνια ισοδύναμα έχουν ταχύτητα ίση με την c .

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299\,792,458 \pm 0,1 \text{ km/sec}$$

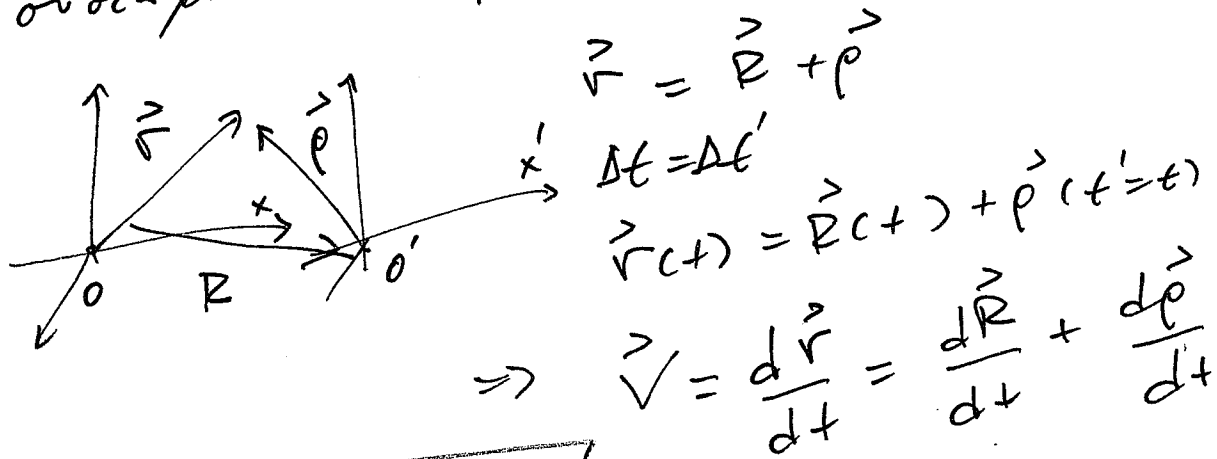
Αυτή είναι η ταχύτητα με την οποία διαδίδονται οι ηλεκτρομαγνητικές.

Σε ηλεκτρομαγνητικό κύμα από μία σημειακή κεραία ο διαδίδεται σφαιρικά και το μέγιστο κύμα δίνει με ταχύτητα c . Το ίδιο σφαιρικό κύμα παρατηρείται και ένας δέκτης παρατηρητής ο οποίος κινείται κατα μήκος των αξόνων x με ταχύτητα v π.χ., και η αρχή ο' ορίζεται ως χρονική στιγμή $t = t' = 0$ με την αρχή των αξόνων O να ακίνητος παρατηρητής.



Επιφάνεια με την Κλασική μηχανική ο χώρος είναι
 ένα Ευκλείδειο φιδύοσας συνέχεις και ο χρόνος
 είναι μία παράμετρος. (2)

Η σχέση συνέχειας αναφέρεται σε δύο
 συστήματα αναφοράς είναι



$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'$$

$$\vec{u} = u \hat{x}$$

(στη τα δύο
 συστήματα
 είναι $O \equiv O'$
 για $t=t'=0$)

Εάν $\vec{r}(t) = u t \hat{x} + \vec{r}'(t')$

$$\vec{R}(t) = u t \hat{x} + \vec{r}'(t')$$

$$\begin{aligned} x &= u t + x' \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

συνεχίζουμε ένα γεγονός
 (x, y, z) στο ένα σύστημα
 και (x', y', z') στο άλλο σύστημα

απόφαση των το φαινόμενο
 ως παρατηρητής κινείται με ταχύτητα
 στο άλλο σύστημα έχουμε:

$$\begin{aligned} v_x' &= v_x - u \\ v_y' &= v_y \\ v_z' &= v_z \end{aligned}$$

2

Μετασχηματισμός του Lorentz

3

Ζητάται να ορίσει ο μετασχηματισμός συμβατό με την ομογένεια της ταχύτητας των φωτός (ΗΜ) Duadi εάν ένα σφαιρικό κύμα εκπέμπεται το στιγμή $t=0$ από την αρχή των αξόνων, φθάνει στο σημείο (x, y, z) την χρονική στιγμή t και έχουμε

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

Έσο οίσοι με αναφοράς S' το σημείο z_0 δίνει με ταχύτητα c οπότε το σημείο είναι στο σημείο το αντίστοιχο (x', y', z') την στιγμή t'

$$\Rightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

Ζητάμε ένα γραμμικό μετασχηματισμό μεταξύ (x, y, z, t) και (x', y', z', t') συμβατό με τα προηγούμενα ($c = \text{ομογενό}$).

$$x' = ax + \epsilon t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \delta x + \eta t$$

\Rightarrow το σημείο x' στο αντίστοιχο x μετατοπίσθησε με ταχύτητα u ως προς x και t έτσι ώστε $\frac{\Delta x}{\Delta t} = u$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{\epsilon}{\eta} = u$$

Ενώ το σημείο $x=0$ αντίστοιχο σε συνεχή κίνηση στο σύστημα x' έστω u

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = -u = \frac{\epsilon}{\eta}$$

$$\Rightarrow \underline{a = \eta} \quad , \quad \underline{\epsilon = -ua}$$

Arzinkadioskope omw oxien ja zo oyalp (4)

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

$$(ax + \epsilon t)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (\delta x + at)^2 \quad \forall x, y, z, t$$

$$\Rightarrow a^2 x^2 + 2ax\epsilon t + \epsilon^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2 \delta^2 x^2 + 2c^2 \delta x at + c^2 a^2 t^2$$

$$\Rightarrow 2a\epsilon = 2\delta ac^2 \Rightarrow \boxed{\epsilon = \delta c^2}$$

$$(a^2 - c^2 \delta^2) x^2 + y^2 + z^2 = (c^2 a^2 - \epsilon^2) t^2$$

$$\Rightarrow a^2 - c^2 \delta^2 = 1 \rightarrow \delta^2 = \frac{a^2 - 1}{c^2} \Rightarrow \delta = \frac{1}{c^2} \frac{a^2}{c^2 - a^2}$$

$$c^2 a^2 - \epsilon^2 = c^2 \Rightarrow c^2 a^2 - a^2 \frac{a^2}{c^2 - a^2} = c^2 \Rightarrow a^2 = \frac{c^2}{c^2 - a^2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}} \quad , \quad \epsilon = \frac{-a}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}}$$

$$\delta = \frac{\epsilon}{c^2} = \frac{-\frac{a}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}} \quad , \quad \eta = a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}} (x - at) \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right.$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}} \left(t - \frac{a}{c^2} x \right) \Rightarrow ct' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}} \left(ct - \frac{a}{c} x \right)$$

Και τώρα εαν $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \Rightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$

Εαν ορίσουμε $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$

(5)

$$b = \frac{u}{c}$$

$\Rightarrow x' = \gamma(x - bct)$, $y' = y$, $z' = z$, $ct' = \gamma(ct - bx)$

το ct είναι διαστάσεων μήκους και μερικές φορές ορίζουμε $x_0 = ct$.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι:

$$x = \gamma(x' + bct')$$

$$y' = y, \quad z' = z$$

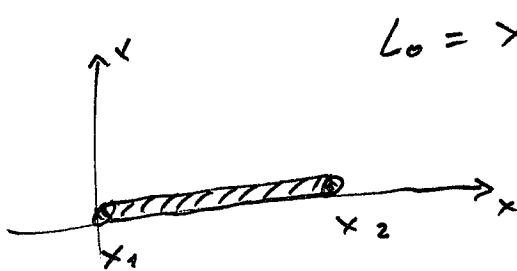
$$ct = \gamma(ct' + bx')$$

(Σημεία $u \rightarrow -u$
οπου βρεθεί τον $x' \leftrightarrow x$.)

3) Σύσφιξη των Μήκους

6

Ραβδος εκτείνεται κατά μήκος τω άξονα των x , μήκος $\rightarrow L_0$, ακίνητη στο σύστημα αναφοράς S .



$$L_0 = x_2 - x_1$$

$L_0 =$ μήκος ηρεμίας της ράβδου

Δεύτερο σύστημα S' , με $\hat{x} \parallel v$ και $\hat{z} \parallel z$, που κινείται με ταχύτητα $\vec{v} = v \hat{x}$ ως προς το S .

{ Θέλουμε να προσδιορίσουμε το μήκος της ράβδου στο κοινό σύστημα με την S' διαδικασία: Θεση των δύο άκρων της ράβδου x_1, x_2 των S χρονικά στιγμή t .

$$x_1 = \gamma (x_1' + vt')$$

$$x_2 = \gamma (x_2' + vt')$$

$$\Rightarrow \frac{x_2 - x_1 = \gamma (x_2' - x_1')}{}$$

$$x_2' - x_1' = L \quad , \quad x_2 - x_1 = L_0 \Rightarrow$$

$$\boxed{L_0 = \gamma L}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} > 1 \Rightarrow$$

$$L_0 > L \quad \text{ή} \quad L < L_0$$

Σύσφιξη των μήκους.

Προσοχή ο παρατηρητής στο S' κάνει τις μετρήσεις ταυτόχρονα ($t_2' = t_1' = t'$)
 Ποσο απέχουν χρονικά στο S άρα οι δύο μετρήσεις της θέσης της ράβδου στο S :

$$\left. \begin{aligned} ct_1 &= \gamma (ct' + \beta x_1') \\ ct_2 &= \gamma (ct' + \beta x_2') \end{aligned} \right\} \Rightarrow c[t_2 - t_1] = \gamma \beta [x_2' - x_1'] = \gamma \beta \frac{x_2 - x_1}{\gamma}$$

$$\Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{\beta}{c} [x_2 - x_1] = \frac{\beta}{c} L_0$$

4) Μέρη των μικρών κενά στην σχετική ταχύτητα

7

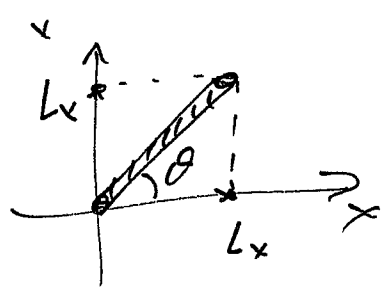
$$x' = x$$

$$z' = z$$

⇒ Η μέτρηση των μικρών ενός κενά είναι ανεξάρτητη της κίνησης (ταχύτητας) αν ο κενός κινείται κάθετα προς το μικρό του.

⇒ οι γωνία ημωχημαγίδα μια ραβδία με τον άξονα του x αλληλίστη σαν από το S πάρε στο S'

δω ότι $L'_x = L_x$ και $L'_x = \frac{L_x}{\gamma}$



$$\Rightarrow \epsilon\phi\theta = \frac{y\sin\theta}{x\cos\theta} = \frac{L_y}{L_x}$$

$$\underline{\epsilon\phi\theta'} = \frac{L'_y}{L'_x} = \frac{L_y}{\frac{L_x}{\gamma}} = \gamma \epsilon\phi\theta$$

$$L_0 = \sqrt{L_x^2 + L_y^2} \quad , \quad L' = \sqrt{L_x'^2 + L_y'^2} = \sqrt{\frac{L_x^2}{\gamma^2} + L_y^2}$$

$$L_x = L_0 \cos\theta, \quad L_y = L_0 \sin\theta$$

$$L' = L_0 \sqrt{(1-b^2)\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

(Άσκηση 5)

(Άσκηση 3) Αλληλίστη όγκος

$$V_0 = L_0^3 = L_x L_y L_z \Rightarrow V_0' = L_x' L_y' L_z' = \frac{L_x}{\gamma} L_y L_z = \sqrt{1-b^2} L_0^3$$

$$\left. \begin{aligned} L_x' &= L_x \\ L_y' &= L_y \\ L_z' &= L_z \end{aligned} \right\}$$

$$\underline{V_0' = \sqrt{1-b^2} V_0}$$

5

Διαστολή του χρόνου

8

(Επιμήκυνση ενός χρονικού διαστήματος)

Χρονος υπέρβαση για δύο γεγονότα A και B

$$\tau = t_2 - t_1$$

που συμβαίνουν στην ίδια θέση $x_1 = x_2 = x$ για το S .

$$\left. \begin{aligned} ct_1' &= \gamma (ct_1 - \beta x_1) \\ ct_2' &= \gamma (ct_2 - \beta x_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow c[t_2' - t_1'] = c\gamma [t_2 - t_1]$$

$$\Rightarrow \frac{t_2' - t_1'}{t_2 - t_1} = \gamma (t_2 - t_1) = \gamma \tau \quad \gamma > 1$$

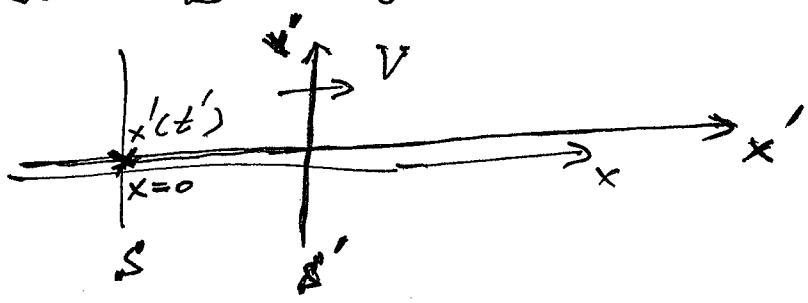
οπότε $\Delta t' > \Delta t$ \rightarrow διαστολή του χρόνου.

Τα δύο γεγονότα A και B δίνονται συμβατικά στην ίδια θέση για τον S' σύμφωνα με τις εξισώσεις:

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= \gamma (x_1 - \beta ct_1) \\ x_2' &= \gamma (x_2 - \beta ct_2) \end{aligned} \right\} x_2' - x_1' = \gamma \beta c [t_1 - t_2]$$

$$\Rightarrow x_2' - x_1' = \beta c (t_2' - t_1') = v (t_2' - t_1')$$

Δύο αναγόμενες στην αρχή των αξόνων για το S με διαφορά χρόνου Δt , απέχουν χρονικά στο S' κατά $\Delta t' = \gamma \Delta t$, και χωρικά κατά $\Delta x' = v \Delta t'$



6 Χρόνος ζωής των π^+ μεσονίων

9

δρομικά σωματίδια είναι ασταθή και διασπώνται έχοντας ένα χαρακτηριστικό χρόνο ημιζωής.

Σχεδόν όλα αυτά τα σωματίδια τα συναντάμε στην ακτινοβολία που έρχεται από το διάστημα και κινούνται με μεγάλη ταχύτητα ως προς τη Γη, αυτός είναι και ο λόγος που φέρονται στην Γη και δεν διασπώνται ενώ αβλήσφαιρα. Ενώ ο μέσος χρόνος ζωής είναι τ , τότε με ταχύτητα $v = \frac{v}{c}$ ως προς τη Γη ο χρόνος που μετράει ο παρατηρητής στην Γη είναι

$$\tau' = \gamma \tau = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

και το διάστημα που διανύουν $\Delta S' = v c \tau' = v c \gamma \tau$ είναι πολύ μεγαλύτερο από το διάστημα που θα έκαναν χωρίς την διαστολή του χρόνου $\Delta S = v c \tau$.

Παράδειγμα π^+ μεσόνιο

$\tau = 2.5 \times 10^{-8}$ second, $\beta \approx 0.90 = \frac{v}{c}$

$\tau' \approx 5.7 \times 10^{-8}$ second, διήγηση

Πειράματα στο CERN, η γωνία με επίζευχους συμβαίνει να έχουμε $\beta = 1 - (5 \times 10^{-5})$

$\tau' = 2.5 \times 10^{-6}$ second

αρα $\Delta S \approx 7m$ και $\Delta S' \approx 400m$ πριν διασπαστούν.

$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$

Ραδιενεργή Διάσπαση

7) Μετασχηματισμοί ταχυτήτων

(10)

Ας υποθέσουμε ότι το σύστημα S' κινείται με ταχύτητα $\vec{v} = v\hat{x}$ ως προς το S .

Ένα σώμα έχει ταχύτητα \vec{u} στο S και \vec{u}' στο S' .

Ποια είναι ταχύτητα μέγεθος u και u' ?

Σχέσεις που συνδέουν συντεταγμένες:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

$$y' = y, \quad z' = z, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Σχέσεις ορισμού ταχυτήτων:

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

Μετασχηματισμοί ταχυτήτων:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vt)}{\gamma(dt - \frac{v}{c}dx)} = \frac{\frac{dx}{dt} - vt}{1 - \frac{v}{c} \frac{dx}{dt}}$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x \frac{v}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - \frac{v}{c}dx)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma(1 - \frac{v}{c} \frac{dx}{dt})}$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x \frac{v}{c^2})}$$

και ομοίως

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x \frac{v}{c^2})}$$

Εάν η φάση μας από το σύστημα $S' \rightarrow S$
βάζουμε σαν $V \rightarrow -V$.

Εάν έχουμε ένα φωτόνιο με $u_x = c, u_y = 0, u_z = 0$

$$\Rightarrow u'_x = \frac{c - V}{1 - c \frac{V}{c^2}} = \frac{c - V}{1 - \frac{V}{c}} = c \frac{c - V}{c - V} = c$$

$u'_y = 0, u'_z = 0$

Εάν $u_x = c, u_y = 0, u_z = 0$

$$\Rightarrow u'_x = -V, u'_z = 0, u'_y = \frac{c}{\gamma(1-0)} = \frac{c}{\gamma}$$

$$\Rightarrow u'^2 = u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z$$

$$u'^2 = V^2 + c^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = V^2 + c^2 - \frac{c^2 V^2}{c^2} = c^2$$

Υπάρχει ΑΣπαικτικό σύστημα Αναφοράς σαν το
φωτόνιο είναι σε κρεμτα?

Οχι!

Π.χ. το S' κινείται με $V=c$ ως προς S
κα το φωτόνιο κινείται με $u_x = c$.

$$\Rightarrow u'_x = \frac{c - V}{1 - c \frac{V}{c^2}} = \frac{c - V}{1 - \frac{V}{c}} = c \frac{c - V}{c - V} = c$$

Παρατηρούμε ότι $V \rightarrow c$, οπότε έχουμε $\frac{0}{0} = \text{αόριστο}$
οπότε

Εάν $u_x = -c$

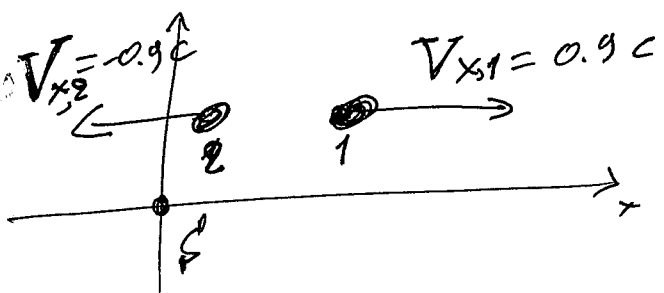
$$u'_x = \frac{-c - c}{1 + \frac{c^2}{c^2}} = \frac{-2c}{2} = -c$$

8

Πρόσθεση ταχυτήτων

19

σε ένα αδρανειακό σύστημα Αναφοράς S_0 δύο σωματίδια κινούνται με αντίθετες ταχύτητες $\pm v_x = 0.9c$.
 με πόση ταχύτητα βλέπει το ένα σωματίδιο το άλλο να κινείται το άλλο;



$$v_2 \text{ (για τον } S') = -0.9c$$

το σύστημα S' κινείται
 προς τον 1 με ταχύτητα

$$V = 0.9c = v_{x1}$$

Αρα η ταχύτητα του
 (δυσδιάφορο σύστημα 1)

2 για το σύστημα S'
 είναι:

$$v_2' = \frac{v_2 - V}{1 - v_2 \frac{V}{c^2}} = \frac{-0.9c - 0.9c}{1 + (0.9)^2} = -\frac{1.80}{1.81}c$$

$$v_2' = -0.994c$$