

## Νόμοι του Νεύτωνα και εφαρμογή στην κίνηση των σωμάτων

### 2.1 Νόμοι του Νεύτωνα

#### Πρώτος Νόμος του Νεύτωνα

Ένα σώμα παραμένει στην ίδια κατάσταση ηρεμίας ή κίνησης με σταθερή ταχύτητα, εάν δεν ασκείται πάνω του καμία εξωτερική δύναμη.

$$\mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = 0$$

όπου

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

#### Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα

Ορμή  $\mathbf{P} = M\mathbf{v}$ , όπου  $M$  η μάζα του σώματος, μάζα ηρεμίας, ή μάζα «αδράνειας», που μετριέται στο εργαστήριο με ένα ζυγό.

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος είναι ανάλογος της δύναμης που ασκείται.

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\mathbf{v})$$

Εάν  $M$  σταθερό, ανεξάρτητο του χρόνου, τότε

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a}$$

Μονάδες:

Στο «διεθνές σύστημα μονάδων»:

- η μάζα μετριέται σε Kgr.
- η ταχύτητα μετριέται σε m/sec
- η επιτάχυνση σε m/sec<sup>2</sup>
- η δύναμη σε Nt, όπου 1 Nt = 1 Kgr m/sec<sup>2</sup>

Στο σύστημα C.G.S:

- η μάζα μετριέται σε gr
- η ταχύτητα μετριέται σε cm/sec
- η επιτάχυνση σε cm/sec<sup>2</sup>
- η δύναμη σε dyn, όπου 1 dyn = 1 gr cm/sec<sup>2</sup>, 1 Nt = 10<sup>5</sup> dyn

**Τρίτος Νόμος του Νεύτωνα**

Όταν δύο σώματα αλληλεπιδρούν, η δύναμη  $F_{21}$  που ασκεί το σώμα (1) στο σώμα (2) είναι αντίθετη της δύναμης που ασκεί το σώμα (2) στο (1):

$$F_{12} = -F_{21}$$

Ισχύει και για δυνάμεις από απόσταση. Άπειρη ταχύτητα διάδοσης κάθε μεταβολής.



**Σχήμα 2.1:** Νόμος δράσης - αντίδρασης.  $F_{21}$  είναι η δύναμη που ασκείται στο (2) από το (1). Η δύναμη  $F_{21}$  δρα στο σώμα (2), η δύναμη  $F_{12}$  δρα στο σώμα (1)

**Εφαρμογή**

$$F = 0$$

$$\frac{dP}{dt} = 0 \Rightarrow P = \text{σταθερό}$$

Η ορμή του συστήματος είναι σταθερή στο χρόνο.

$$P = Mv$$

Εάν η  $M$  είναι σταθερή τότε

$$v = \text{σταθερή} = v_0$$

$$\frac{dr}{dt} = v_0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} \hat{x} + \frac{dy}{dt} \hat{y} + \frac{dz}{dt} \hat{z} = v_{0x} \hat{x} + v_{0y} \hat{y} + v_{0z} \hat{z}$$

$$\Rightarrow \text{τρεις εξισώσεις: } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_{0x} \Rightarrow dx = v_{0x} dt \\ \frac{dy}{dt} = v_{0y} \\ \frac{dz}{dt} = v_{0z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int dx = \int v_{0x} dt + c \Rightarrow x = v_{0x} t + c$$

Για  $t = 0 \Rightarrow c = x_0$ . Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία για τα  $y, z$ , οπότε τελικά παίρνουμε

$$r = v_0 t + r_0$$

όπου

$$r_0 = x_0 \hat{x} + y_0 \hat{y} + z_0 \hat{z} \quad \text{και} \quad v_0 = v_{0x} \hat{x} + v_{0y} \hat{y} + v_{0z} \hat{z}$$

**Πρόβλημα 1**

Δύο σωματίδια με ίση μάζα  $m$  κινούνται με διανύσματα θέσης

$$r_1(t) = (t^2 + 3t - 5) \hat{x} + (3t + 7) \hat{y} + (21 - 2t^2) \hat{z}$$

$$r_2(t) = (25 - t - t^2) \hat{x} + (5t + 1) \hat{y} + (2t^2 - 5t) \hat{z}$$

(α) Να αποδείξετε ότι τα σωματίδια θα συγκρουσθούν.

(β) Ποια δύναμη ασκείται σε κάθε σωματίδιο;

(γ) Να δείξετε ότι η ολική ορμή παραμένει σταθερή.

Λύση:

(α) Υπάρχει μια χρονική στιγμή  $t_0$  όπου έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t_0) &= \mathbf{r}_2(t_0) \\ \Rightarrow \begin{cases} t^2 + 3t - 5 = 25 - t - t^2 & \Rightarrow 2t^2 + 4t - 30 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = 3, -5 \\ 3t + 7 = 5t + 1 & \Rightarrow 2t - 6 = 0 \Rightarrow t = 3 \\ 21 - 2t^2 = 2t^2 - 5t & \Rightarrow 4t^2 - 5t - 21 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = 3, -14/8 \end{cases} \end{aligned}$$

επομένως έχουμε κοινή λύση για  $t_0 = 3$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_1(t_0) = \mathbf{r}_2(t_0)$$

άρα τα σώματα συγκρούονται για  $t = 3 \text{ sec}$ .

(β)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (2t + 3)\hat{x} + 3\hat{y} - 4t\hat{z} \\ \mathbf{F}_1 &= m \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = m \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = 2m\hat{x} - 4m\hat{z} \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = -2t\hat{x} + 5\hat{y} + (4t - 5)\hat{z} \\ \mathbf{F}_2 &= m \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = -2m\hat{x} + 4m\hat{z} \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$ .

(γ)

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 3m\hat{x} + 8m\hat{y} - 5m\hat{z}$$

σταθερή ανεξάρτητη του χρόνου, άρα η ολική ορμή διατηρείται.

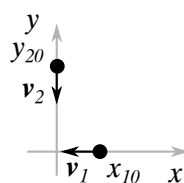
$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{ολ}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 &= \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), \quad \mathbf{F}_{\text{ολ}} = 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) &= 0 \\ \Rightarrow \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 &= \text{σταθερό} \end{aligned}$$

### Πρόβλημα 2

Δύο σωματίδια (1) και (2) βρίσκονται αρχικά στις θέσεις ( $x_1 = 5 \text{ m}$ ,  $y_1 = 0$ ) και ( $x_2 = 0$ ,  $y_2 = 10 \text{ m}$ ) με ταχύτητες  $\mathbf{v}_1 = -4\hat{x} \text{ m/sec}$  και  $\mathbf{v}_2 = -v_{20}\hat{y}$ .

- Ποια είναι η ταχύτητα  $\mathbf{v}_2$  αν τα σωματίδια πρόκειται να συγκρουσθούν;
- Πόση είναι η τιμή της σχετικής ταχύτητας  $\mathbf{u}_{12}$ , του σωματιδίου (1) ως προς το (2);
- Διατυπώστε ένα γενικό κριτήριο για την αναγνώριση μιας τροχιάς σύγκρουσης δύο σωματιδίων.

Λύση:

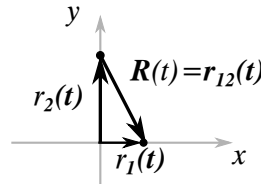


Σχήμα 2.2

(α) Τα δύο σωματίδια, εάν συγκρουστούν, θα συγκρουστούν στη θέση  $(0, 0)$  τη χρονική στιγμή  $t$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_{10} &= v_{10}t \quad \text{και} \quad y_{20} = v_{20}t \\ \Rightarrow t &= \frac{x_{10}}{v_{10}} = \frac{y_{20}}{v_{20}} \Rightarrow v_{20} = \frac{y_{20}}{x_{10}} v_{10} \\ v_{20} &= 8 \text{ m/sec} \end{aligned}$$

(β)



Σχήμα 2.3

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}_{12}(t) \Rightarrow \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{v}_1 t + \mathbf{r}_{10}$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{v}_2 t + \mathbf{r}_{20}$$

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \Rightarrow \mathbf{u}_{12} = \frac{d\mathbf{r}_{12}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}$$

$$\mathbf{u}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = -v_{10}\mathbf{x} - (-v_{20}\mathbf{y})$$

$$\mathbf{u}_{12} = -v_{10}\hat{\mathbf{x}} + v_{20}\hat{\mathbf{y}} = -4\hat{\mathbf{x}} + 8\hat{\mathbf{y}}$$

(γ)

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_{10} + \mathbf{v}_{10}t \\ \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_{20} + \mathbf{v}_{20}t \end{cases} \Rightarrow \mathbf{r}_1(t_0) = \mathbf{r}_2(t_0)$$

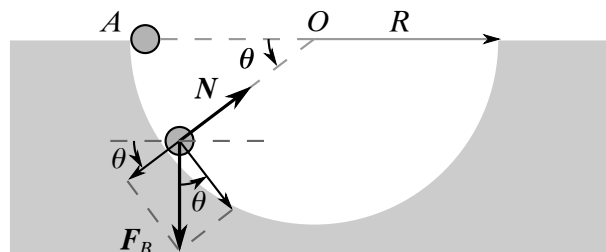
$$\Rightarrow \mathbf{r}_{10} + \mathbf{v}_{10}t_0 = \mathbf{r}_{20} + \mathbf{v}_{20}t_0$$

$$\Rightarrow (\mathbf{v}_{10} - \mathbf{v}_{20})t = \mathbf{r}_{20} - \mathbf{r}_{10}$$

επομένως το διάνυσμα  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_{20} - \mathbf{r}_{10}$  είναι παράλληλο με το  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_{10} - \mathbf{v}_{20}$ .

### Πρόβλημα 3

Μικρή σφαίρα μάζας  $m$  βρίσκεται αρχικά στο σημείο A και μετά ολισθαίνει σε λεία κυκλική επιφάνεια (βλ. σχήμα). Εκφράστε τη γωνιακή ταχύτητα και τη δύναμη που ασκεί η επιφάνεια στη σφαίρα ως συνάρτηση της γωνίας  $\theta$ .



Σχήμα 2.4

Ο νόμος του Νεύτωνα λέει

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\Rightarrow \mathbf{N} + \mathbf{F}_B = m\mathbf{a}$$

Για την επιτροχία συνιστώσα έχουμε

$$F_B \cos \theta = ma_\epsilon = mR \frac{d\omega}{dt}$$

Για την κεντρομόλο συνιστώσα έχουμε

$$N - F_B \sin \theta = ma_\kappa = m \frac{v^2}{R} = mR\omega^2 \quad (2.1)$$

όπου  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

$$mg \cos \theta = mR \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow g \cos \theta = R \frac{d\omega}{dt} = R \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{g}{R} \cos \theta = \omega \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{d\omega^2}{d\theta}$$

$$\Rightarrow \int d\omega^2 = \frac{2g}{R} \int \cos \theta d\theta = \frac{2g}{R} \sin \theta + c$$

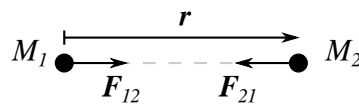
$$\omega^2 = \frac{2g}{R} \sin \theta + c, \quad \theta = 0 \Rightarrow \omega = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{2g}{R} \sin \theta$$

$$\stackrel{(2.1)}{\Rightarrow} N - mg \sin \theta = mR \frac{2g}{R} \sin \theta$$

$$\Rightarrow N = 3mg \sin \theta$$

## 2.2 Δύναμη Βαρύτητας - Νόμος του Νεύτωνα για την Παγκόσμια Έλξη



Σχήμα 2.5

Η δύναμη βαρύτητας ανάμεσα σε δύο σώματα είναι μια κεντρική δύναμη

$$\mathbf{F}_{21} = -G \frac{M_1 M_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

όπου

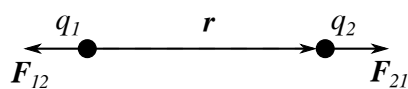
$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad r = |\mathbf{r}|$$

και  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{Kg}^2$  είναι η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας. Με  $\mathbf{F}_{21}$  συμβολίζουμε τη δύναμη που ασκείται στο σώμα (2) από το σώμα (1).

Η μάζα των σωμάτων στο νόμο του Νεύτωνα είναι ίση με τη μάζα που μπαίνει στο βασικό δυναμικό νόμο της μηχανικής:

$$\text{Δύναμη} = \text{μάζα} \times \text{επιτάχυνση}$$

## 2.3 Ηλεκτρική δύναμη Coulomb - Ηλεκτρικό πεδίο



Σχήμα 2.6

$$\mathbf{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Τα φορτία  $q_1, q_2$  είναι αλγεβρικά

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,988 \cdot 10^9 \text{ Nt m}^2/\text{Cb}^2$$

Τα φορτία μετρούνται σε Coulomb (Cb).  $\epsilon_0$  είναι η διηλεκτρική σταθερά του κενού και

$$q_e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb}$$

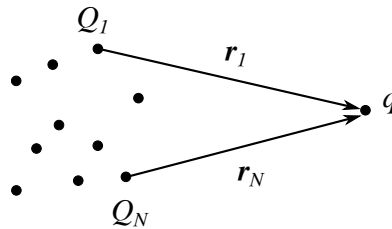
είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου.

Η δύναμη Coulomb είναι πολύ ισχυρότερη από τη δύναμη της βαρύτητας.

Ανάμεσα σε δύο γειτονικά πρωτόνια στον πυρήνα η δύναμη Coulomb είναι 90 Nt, ενώ η δύναμη βαρύτητας είναι  $10^{-34}$  Nt.

Ένα σύνολο φορτίων  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  ασκούν δύναμη σε ένα φορτίο  $q$  ίση με το άθροισμα των δυνάμεων

$$\mathbf{F}_n = k \frac{Q_n q}{r_n^2} \hat{\mathbf{r}}_n$$



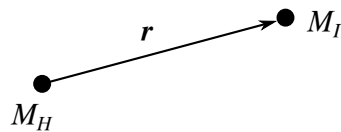
Σχήμα 2.7

$$\mathbf{F}_{\text{ολ}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = q \left\{ k \frac{Q_1}{r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1 + \dots + k \frac{Q_N}{r_N^2} \hat{\mathbf{r}}_N \right\}$$

$$\mathbf{F}_{\text{ολ}} = q\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \text{ένταση του ηλεκτρικού πεδίου}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο περιγράφεται από την Έντασή του.

### Εφαρμογή : Κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο



Σχήμα 2.8

$$-G \frac{M_H M_\Gamma}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = M_\Gamma \mathbf{a}$$

σε πολικές συντεταγμένες.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{επ}} + \mathbf{a}_{\text{κ}}$$

$$\mathbf{a}_{\text{κ}} = \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{a}_{\text{επιπ}} = \left[ 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.2)$$

Η δύναμη είναι μόνο ακτινική.

Αναζητούμε λύση με  $r = \text{σταθερό} = R$

$$\Rightarrow \begin{cases} -G \frac{M_H}{R^2} \hat{R} &= -R \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \hat{R} \\ 0 &= R \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{\theta} \stackrel{(2.2)}{\Rightarrow} \frac{d\theta}{dt} = \text{σταθερό} \\ \text{Θέτουμε } \frac{d\theta}{dt} &= \omega = \frac{2\pi}{T} \end{cases}$$

$$G \frac{M_H}{R^2} = R\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{GM_H}{R^3}$$

Εάν ξέρουμε τα  $G, M_H, R$ , τότε  $\omega = \sqrt{\frac{GM_H}{R^3}}$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_H}}$$

**Πρόβλημα 4: Γεωστατικός Δορυφόρος**

Δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά με κέντρο το κέντρο της Γης και με επίπεδο τροχιάς το επίπεδο του Ισημερινού. Σε ποια απόσταση περιστροφής  $R$  θα φαίνεται να παραμένει ακίνητος από παρατηρητή στη Γη;

Λύση:

Κυκλική κίνηση με σταθερή ταχύτητα

$$\frac{GM_\Gamma M_\Delta}{R^2} = m_\Delta \frac{v^2}{R} = m_\Delta R\omega^2$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad T = 24\text{h} = 8,64 \times 10^4 \text{ sec}$$

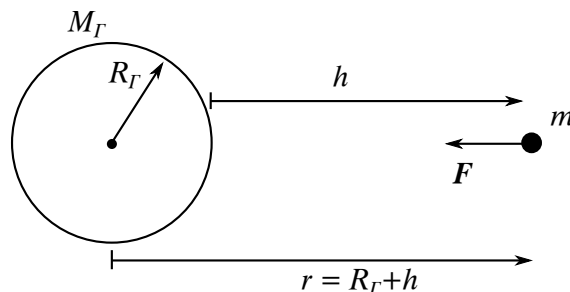
$$\Rightarrow R^3 = \frac{GM_\Gamma}{\omega^2} = \frac{GM_\Gamma}{4\pi^2} T^2$$

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{Kgr} \cdot \text{sec}^2}, \quad M_\Gamma = 5,98 \times 10^{24} \text{ Kgr}$$

$$R^3 \simeq 7,5 \times 10^{22} \text{ m}^3 \Rightarrow R_{\text{δορυφ.}} = 42000 \text{ Km}$$

$$R_{\text{ΓΗ}} \simeq 6400 \text{ Km}, \quad R_{\text{δορυφ.}} \simeq \frac{1}{10} R_{\text{Γη-Σελήνη}}$$

**Πρόβλημα 5: Βάρος σωμάτων, Πεδίο Βαρύτητας κοντά στη Γη**



Σχήμα 2.9

$$r = R_\Gamma + h$$

$$F = \frac{GM_\Gamma m}{(R_\Gamma + h)^2} = \frac{GM_\Gamma m}{R^2} \frac{1}{(1 + h/R)^2}$$

$$F \simeq G \frac{M_{\Gamma} m}{R_{\Gamma}^2} \left\{ 1 - \frac{2h}{R_{\Gamma}} + 3 \frac{h^2}{R_{\Gamma}^2} + \dots \right\}, \quad \text{ανάπτυξη σε σειρά Taylor}$$

Εάν  $h \simeq 1 \text{ Km}$ ,  $R_{\Gamma} \simeq 6400 \text{ Km}$

$$\Rightarrow \frac{h}{R_{\Gamma}} \simeq \frac{1}{6400} \ll 1$$

$$\Rightarrow F = \frac{GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^2} m = mg$$

$$g = \frac{GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^2} \simeq 9,81 \text{ m/sec}^2$$

$$\mathbf{F} = -mg\hat{z}$$

Ταυτίζουμε τον άξονα  $z$  τοπικά με την ακτινική διεύθυνση.

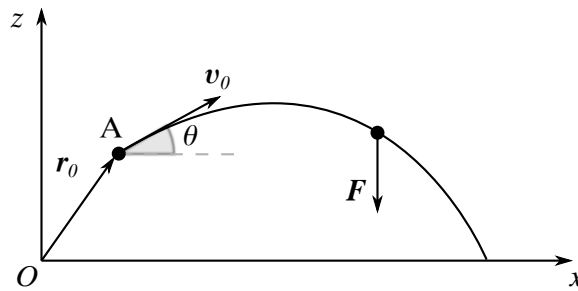
$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^2} = 1 + (-2)\varepsilon + \frac{1}{2}(-2)(-3)\varepsilon^2 + \dots$$

$$f(t) = \frac{1}{t^2}, \quad f'(t) = \frac{-2}{t^3}, \quad f''(t) = \frac{6}{t^4}, \dots$$

## 2.4 Βολή βλήματος σε ομογενές πεδίο βαρύτητας

Σώμα μάζας  $m$  εκτοξεύεται από τη θέση  $A$  με αρχική ταχύτητα  $v_0$ . Να βρείτε την ταχύτητα και τη θέση ως συνάρτηση του χρόνου.

Η κίνηση γίνεται στο κενό, χωρίς να λάβουμε υπόψιν την αντίσταση του αέρα.



Σχήμα 2.10

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= m\mathbf{a}, & \mathbf{r} &= x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \\ v_0 &= v_{0x}\hat{x} + v_{0z}\hat{z}, & \mathbf{r}_0 &= x_0\hat{x} + y_0\hat{y} + z_0\hat{z} \\ \mathbf{F} &= -mg\hat{z}, & \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \end{aligned}$$

Από το νόμο του Νεύτωνα έχουμε τρεις εξισώσεις, μία για κάθε συνιστώσα :

$$0 = m \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow v_x(t) = \text{σταθερή} = v_{0x} \quad (2.3)$$

$$0 = m \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow v_y(t) = \text{σταθερή} = v_{0y} = 0 \quad (2.4)$$

$$-mg = m \frac{dv_z}{dt} \Rightarrow \frac{dv_z}{dt} = -g \Rightarrow \int dv_z = -g \int dt + c \Rightarrow v_z = -gt + c \quad (2.5)$$

με  $v(t=0) = c \Rightarrow c = v_{0z}$ .

$$\stackrel{(2.3)}{\Rightarrow} \frac{dx}{dt} = v_{0x} \Rightarrow x = v_{0x}t + x_0$$

$$\stackrel{(2.4)}{\Rightarrow} \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow y(t) = y_0$$

$$\stackrel{(2.5)}{\Rightarrow} v_z = -gt + v_{0z}$$



$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= v_z = -gt + v_{0z} \\ dz &= -gtdt + v_{0z}dt\end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε και έχουμε

$$\begin{aligned}\int dz &= -g \int tdt + \int v_{0z}dt + c \\ z &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0\end{aligned}$$

και

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta, \quad v_{0z} = v_0 \sin \theta$$

Η τροχιά στο επίπεδο  $(x, z)$  είναι **παραβολή**, με αντικατάσταση του χρόνου  $t$  βρίσκουμε:

$$z = \frac{v_{0z}}{v_{0x}}(x - x_0) - \frac{g}{2v_{0x}^2}(x - x_0)^2 + z_0$$

Παίρνουμε ως σημείο βολής την αρχή των αξόνων,  $(x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0)$ . Για το **μέγιστο ύψος** έχουμε

$$\frac{dz}{dt} = 0 \Rightarrow v_{0z} = gt_{\mu} \Rightarrow t_{\mu} = \frac{v_{0z}}{g}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g < 0 \Rightarrow \text{μέγιστο}$$

$$h = z(t_{\mu}) = -\frac{1}{2}g \frac{v_{0z}^2}{g^2} + v_{0z} \frac{v_{0z}}{g} = \frac{v_{0z}^2}{2g}$$

άλλα

$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

επομένως στο μέγιστο ύψος η ταχύτητα ανόδου μηδενίζεται.

### Βεληνεκές

Ορίζεται ως η οριζόντια απόσταση που διανύει το βλήμα, ώστε να φτάσει-επιστρέψει στο οριζόντιο επίπεδο εκτόξευσης.

$$z(t) = 0 \Rightarrow v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

$$t \left( v_{0z} - \frac{1}{2}gt \right) = 0 \Rightarrow t_{\beta} = 2 \frac{v_{0z}}{g}$$

$$R = x(t_{\beta}) = 2 \frac{v_{0x}v_{0z}}{g} = 2v_0^2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{g}$$

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta, \quad \text{συνάρτηση της γωνίας } \theta$$

Γενικά έχουμε δύο γωνίες βολής με το ίδιο βεληνεκές,  $\theta$  και  $\frac{\pi}{2} - \theta$ .

Για το **μέγιστο** βεληνεκές έχουμε

$$\frac{dR}{d\theta} = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$R' = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos 2\theta, \quad R'' = -4 \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$$

$$R'' \left( \theta = \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{4v_0^2}{g} < 0 \Rightarrow \text{μέγιστο}$$

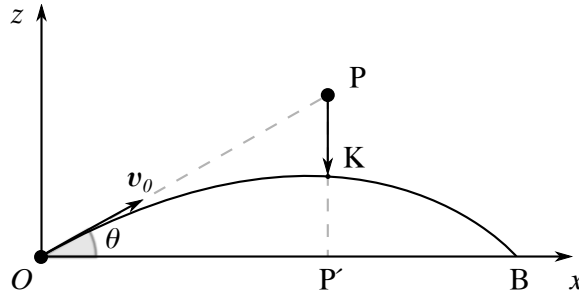
Στο επίπεδο  $(x, z)$  αντίστοιχα έχουμε:

$$\text{μέγιστο ύψος, } \frac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow x_{\mu} = \frac{v_{0z}v_{0x}}{g}$$

$$\text{βεληνεκές, } z = 0 \Rightarrow x_{\beta} = 2 \frac{v_{0z}v_{0x}}{g} = 2x_{\mu}$$

**Πρόβλημα 6: Ο πίθηκος και ο κυνηγός**

Βλήμα εκτοξεύεται από ένα όπλο στη θέση  $O$ , προς ένα στόχο που βρίσκεται αρχικά στη θέση  $P$ . Ο κινητός στόχος αφήνεται ελεύθερος την ίδια χρονική στιγμή που το βλήμα εκτοξεύεται. Το βλήμα κτυπά τον στόχο κατά τη διάρκεια της πτώσης του, ανεξάρτητα από την ταχύτητα του βλήματος.



Σχήμα 2.11

$$\begin{aligned}x_B &= v_{0x}t, & z_B &= v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 \\x_{\sigma\tau}(t) &= x_P, & z_{\sigma\tau} &= H - \frac{1}{2}gt^2 \\H &= PP', & \tan \theta &= \frac{PP'}{OP} = \frac{H}{x_P}\end{aligned}\quad (2.6)$$

Τη στιγμή της σύγκρουσης έχουμε

$$\begin{aligned}x_B(t) &= x_{\sigma\tau}(t) \Rightarrow v_{0x}t = x_P \Rightarrow t = \frac{x_P}{v_{0x}} \\&\Rightarrow t = \frac{x_P}{v_0 \cos \theta}\end{aligned}\quad (2.7)$$

και

$$\begin{aligned}z_B(t) &= z_{\sigma\tau}(t) \Rightarrow v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 = H - \frac{1}{2}gt^2 \\&\Rightarrow t = \frac{H}{v_{0z}} = \frac{H}{v_0 \sin \theta} \\(2.7) &= (2.8) \Rightarrow \frac{x_P}{v_0 \cos \theta} = \frac{H}{v_0 \sin \theta} \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{H}{x_P}\end{aligned}\quad (2.8)$$

ισχύει λόγω της σχέσης (2.6).

**Πρόβλημα 7: Μήκος τροχιάς βλήματος**

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + z\hat{z}$$

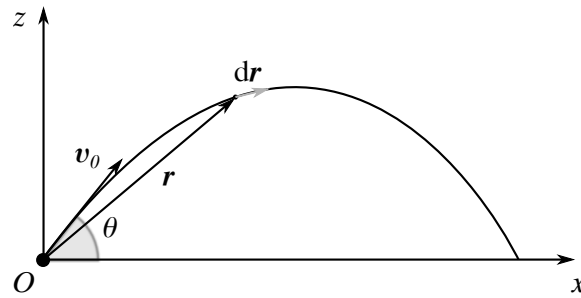
Στοιχειώδες μήκος τροχιάς  $ds = |d\mathbf{r}|$

$$ds = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}} = \sqrt{(dx)^2 + (dz)^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= |\mathbf{v}| = v \\ds &= \sqrt{v_{0x}^2 + (v_{0z} - gt)^2} dt \\s_0 &= \int_0^{t_0} \sqrt{v_{0x}^2 + (v_{0z} - gt)^2} dt\end{aligned}$$



Σχήμα 2.12

$$s_0 = \int_0^{t_0} \sqrt{v_{0x}^2 + g^2 \left(t - \frac{v_{0z}}{g}\right)^2} dt$$

Ορίζουμε τη νέα μεταβλητή  $k = g \left(t - \frac{v_{0z}}{g}\right)$

$$k = gt - v_{0z}, \quad dk = g dt$$

$$\Rightarrow s_0 = \frac{1}{g} \int_{-v_{0z}}^{gt_0 - v_{0z}} \sqrt{v_{0x}^2 + k^2} dk$$

$$\int \sqrt{v_{0x}^2 + k^2} dk = \frac{k\sqrt{k^2 + v_{0x}^2}}{2} + \frac{v_{0x}^2}{2} \ln \left(k + \sqrt{k^2 + v_{0x}^2}\right)$$

$$t_0 = \frac{2v_{0z}}{g} \Rightarrow gt_0 - v_{0z} = v_{0z}$$

για το βεληνεκές.

$$\begin{aligned} s_\beta &= \frac{1}{2g} \left\{ 2v_{0z} \sqrt{v_{0z}^2 + v_{0x}^2} + v_{0x}^2 \ln \left(v_{0z} + \sqrt{v_{0z}^2 + v_{0x}^2}\right) - v_{0x}^2 \ln \left(-v_{0z} + \sqrt{v_{0z}^2 + v_{0x}^2}\right) \right\} \\ &= \frac{v_{0z}}{g} v + v_{0x}^2 \ln \frac{v + v_{0z}}{v - v_{0z}} \\ &= \frac{v^2}{g} \sin \theta + v^2 \cos^2 \theta \ln \left(\frac{v + v \sin \theta}{v - v \sin \theta}\right) \\ &= \frac{v^2}{g} \sin \theta + v^2 \cos^2 \theta \ln \left(\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}\right) \end{aligned}$$

## 2.5 Βολή στον αέρα

Κατά την κίνηση του βλήματος ασκείται μια δύναμη αντίστασης (τριβή) από τον αέρα, ανάλογη της ταχύτητας του βλήματος για μικρές ταχύτητες, ενώ εάν η ταχύτητα του βλήματος είναι μεγαλύτερη μιας οριακής τιμής, η δύναμη τριβής είναι ανάλογη με το τετράγωνο της ταχύτητας.

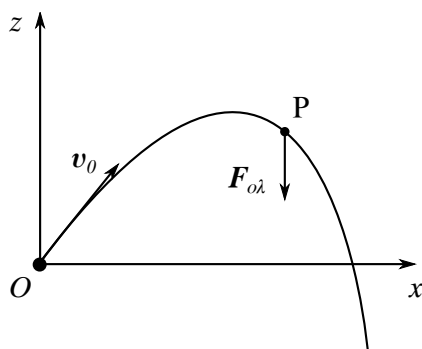
$$\mathbf{F}_T = -k\mathbf{v} \quad \text{με } v < v_{\text{critical}}$$

$$\mathbf{F}_T = -\tilde{k}v^2\hat{\mathbf{v}} \quad \text{με } v > v_{\text{critical}}$$

Οι συντελεστές  $k, \tilde{k}$  εξαρτώνται από το σχήμα του βλήματος και το ρευστό<sup>1</sup> μέσα στο οποίο κινείται το βλήμα.

Εξετάζουμε λοιπόν την κίνηση ενός βλήματος στο πεδίο βαρύτητας με δύναμη τριβής ανάλογη της ταχύτητας.

<sup>1</sup>Ο αέρας θεωρείται ρευστό.



Σχήμα 2.13

$$\mathbf{F}_{ολ} = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_T$$

$$\mathbf{F}_{ολ} = -mg\hat{z} - k\mathbf{v}$$

$$\mathbf{F}_{ολ} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Ανάλυση σε άξονες:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -kv_x \quad (2.9)$$

$$m\frac{dv_z}{dt} = -mg - kv_z \quad (2.10)$$

Από τη σχέση (2.9) έχουμε

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}v_x \Rightarrow \int \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m} \int dt + c$$

$$\ln v_x = -\frac{k}{m}t + c$$

$$v_x = e^c e^{-kt/m}, \quad v_x(t=0) = v_{x_0} = e^c$$

$$v_x(t) = v_{x_0} e^{-kt/m}$$

Από τη σχέση (2.10) παίρνουμε

$$\frac{dv_z}{dt} = -\left(g + \frac{k}{m}v_z\right)$$

$$b = \frac{k}{m}, \quad u = g + \frac{k}{m}v_z, \quad du = b dv_z$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{1}{b} \frac{du}{dt} = -u \Rightarrow \frac{du}{dt} = -bu$$

$$\frac{du}{u} = -b dt \Rightarrow \ln u = -bt + c$$

$$u = c' e^{-bt}, \quad u(t=0) = c' = g + \frac{k}{m}v_{z0}$$

$$g + \frac{k}{m}v_z = \left(g + \frac{k}{m}v_{z0}\right) e^{-kt/m}$$

$$v_z = \frac{m}{k} \left(g + \frac{k}{m}v_{z0}\right) e^{-kt/m} - \frac{mg}{k}$$

Οριακή ταχύτητα για  $t \rightarrow +\infty$

$$v_z(t \rightarrow \infty) = -\frac{mg}{k}$$

π.χ. ταχύτητα πτώσης ενός αλεξιπτωιστή.

Το  $m/k$  έχει διαστάσεις χρόνου:  $m/k = \tau_0$ .

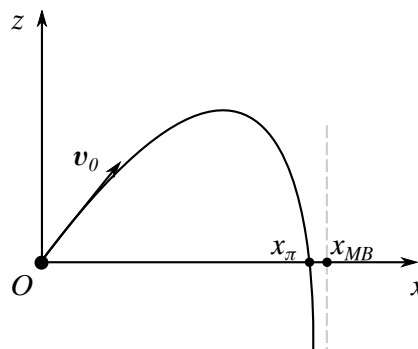
Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_x(t) = v_{x0} e^{-kt/m} \\ dx &= v_{x0} e^{-kt/m} dt \\ x &= v_{x0} \int e^{-kt/m} dt + c \\ x &= -\frac{mv_{x0}}{k} e^{-kt/m} + c \Rightarrow t = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \Rightarrow c &= \frac{mv_{x0}}{k} \Rightarrow x = \frac{mv_{x0}}{k} (1 - e^{-kt/m})\end{aligned}$$

Μέγιστο Βεληνεκές για  $t \rightarrow +\infty$

$$x_{MB} = \frac{mv_{x0}}{k}$$

Υπολογίζουμε την κατακόρυφη συντεταγμένη



Σχήμα 2.14

$$\frac{dz}{dt} = v_z(t) = Ae^{-bt} - B$$

όπου

$$\begin{aligned}A &= \frac{m}{k} \left( g + \frac{k}{m} v_{z0} \right), \quad B = \frac{mg}{k} \\ dz &= Ae^{-bt} dt - B dt \\ \Rightarrow z(t) &= -\frac{A}{b} e^{-bt} - Bt + c \\ z(0) = 0 &\Rightarrow -\frac{A}{b} + c = 0 \Rightarrow c = \frac{A}{b} \\ z(t) &= \frac{A}{b} (1 - e^{-bt}) - Bt\end{aligned}$$

Σημείο πτώσης όταν  $z = 0$  για δεύτερη φορά.

$$\frac{dz}{dt} = 0 \Rightarrow \text{μέγιστο ύψος}$$

## 2.6 Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε σταθερό ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

όπου η ένταση  $\mathbf{E}$  είναι σταθερή.

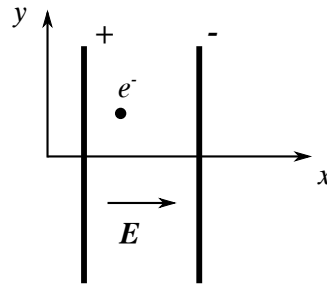
$$\begin{aligned}\mathbf{F} = M\mathbf{a} &= M \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad \mathbf{a} = \frac{q}{M} \mathbf{E} \\ \Rightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{q}{M} \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{v}(t) = \frac{q}{M} \mathbf{E}t + \mathbf{v}_0 \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{r}(t) = \frac{q\mathbf{E}}{2M} t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0\end{aligned}$$

Μονάδες:

$$\text{Ένταση} \simeq \text{Nt/Cb} = \text{Volt/meter}$$

**Παράδειγμα**

Πρωτόνιο ξεκινά από την ηρεμία και επιταχύνεται με τη βοήθεια ηλεκτρικού πεδίου έντασης  $E_x = 30\,000\text{ V/m}$  για ένα nanosecond ( $10^{-9}\text{ s}$ ). Πόση είναι η τελική ταχύτητα; Πόση είναι η επιτάχυνση;



Σχήμα 2.15

Λύση:

$$M_p = 1,672 \times 10^{-27}\text{ Kg}, \quad q_p = q_e = 1,6 \times 10^{-19}\text{ Cb}$$

$$v_x = \frac{q_p}{M_p} E_x t, \quad v_0 = 0 \Rightarrow v_x = 3 \times 10^3\text{ m/sec}$$

$$a = \frac{q_p}{m_p} E_x = \frac{1,6 \times 10^{-19}\text{ Cb}}{1,67 \times 10^{-27}\text{ Kg}} 3 \times 10^4\text{ Nt/Cb}$$

$$a \simeq 3 \times 10^{12} \frac{\text{Cb Kg m}}{\text{Kg Cb sec}^2} = 3 \times 10^{12}\text{ m/sec}^2$$

**2.7 Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε σταθερό ομογενές μαγνητικό πεδίο**

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Μονάδες: Μαγνητικό πεδίο σε Tesla

$$1\text{ T} = 1 \frac{\text{Nt}}{\text{Cb m/sec}} = 1 \frac{\text{Nt sec}}{\text{Cb m}}$$

Εξίσωση κίνησης

$$M\mathbf{a} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$M \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Έστω  $\mathbf{B} = B\hat{z}$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \hat{x}v_y B - \hat{y}v_x B$$

από την οποία προκύπτουν

$$M \frac{dv_x}{dt} = qv_y B \tag{2.11}$$

$$M \frac{dv_y}{dt} = -qv_x B \tag{2.12}$$

$$M \frac{dv_z}{dt} = 0 \Rightarrow v_z(t) = v_0 z \quad \text{σταθερή}$$

Ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα στον άξονα  $z$

$$z(t) = v_0 z t + z_0$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (2.11) και (2.12)

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= \frac{qB}{M}v_y \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{qB}{M}v_x\end{aligned}\quad (2.13)$$

Παραγωγίζουμε ξανά την (2.11)

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = \frac{qB}{M} \frac{dv_y}{dt} \stackrel{(2.13)}{=} -\frac{q^2B^2}{M^2}v_x \quad (2.14)$$

από την οποία προκύπτει

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = -\omega^2v_x, \quad \omega = \frac{qB}{M} = \frac{2\pi}{T}$$

με διαστάσεις 1/sec, **κυκλοτρονική συχνότητα** ανεξάρτητη της ταχύτητας.

Λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.14):

$$\begin{aligned}v_x(t) &= c_0 \cos(\omega t + \phi_0) = A_0 \cos \omega t + \Gamma_0 \sin \omega t \\ v_y(t) &= \frac{M}{qB} \frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{\omega} \frac{dv_x}{dt} = -A_0 \sin \omega t + \Gamma_0 \cos \omega t\end{aligned}$$

Δύο άγνωστες σταθερές  $(c_0, \phi_0) \equiv (A_0, \Gamma_0)$  προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Αρχικές συνθήκες:  $v_{0x} = 0, v_{0y} = v_1$

$$\begin{aligned}v_x(0) &= A_0 = 0 \quad \text{και} \quad v_y(0) = 0 + \Gamma_0 = v_1 \\ \Rightarrow \quad v_x(t) &= v_1 \sin \omega t \\ v_y(t) &= v_1 \cos \omega t\end{aligned}$$

Η ολική ταχύτητα παραμένει σταθερή στο χρόνο

$$\begin{aligned}v &= |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{v_1^2 \sin^2 \omega t + v_1^2 \cos^2 \omega t + v_{0z}^2} \\ v &= |\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_{0z}^2}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  η κινητική ενέργεια  $K = \frac{1}{2}mv^2$  διατηρείται.

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ \frac{dK}{dt} &= m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0\end{aligned}$$

διότι το  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  είναι κάθετο και στο  $\mathbf{v}$  και στο  $\mathbf{B}$ .

### 2.7.1 Εξίσωση τροχιάς

Έστω ότι για  $t = 0$  έχουμε

$$x_0, y_0, z_0 \quad \text{και} \quad v_1 > 0$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x(t) \Rightarrow dx = v_x(t)dt = v_1 \sin \omega t dt$$

$$x = \int v_1 \sin \omega t dt + c_x$$

$$x(t) = -\frac{v_1}{\omega} \cos \omega t + c_x \Rightarrow -\frac{v_1}{\omega} + c_x = x_0 \Rightarrow c_x = \frac{v_1}{\omega} + x_0$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y(t) \Rightarrow \int dy = \int v_1 \cos \omega t dt + c_y$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{v_1}{\omega} \sin \omega t + c_y \Rightarrow c_y = y_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = -\frac{v_1}{\omega} \cos \omega t + \frac{v_1}{\omega} + x_0 \\ y(t) = \frac{v_1}{\omega} \sin \omega t + y_0 \\ z(t) = v_{0z}t + z_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{v_1}{\omega} - x_0\right)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{v_1^2}{\omega^2} = R^2$$

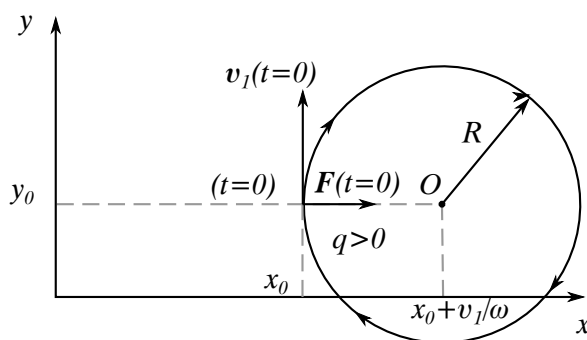
επομένως η κίνηση στο επίπεδο  $(x, y)$  είναι κύκλος με κέντρο το σημείο  $(v_1/\omega + x_0, y_0)$  και ακτίνα

$$R = \frac{v_1}{\omega} = \frac{Mv_1}{qB}$$

η οποία λέγεται **κυκλοτρονική ακτίνα** και εξαρτάται γραμμικά από την ταχύτητα.

Το σώμα εκτελεί ελικοειδή κίνηση κατά τον άξονα των  $z$  με κυκλική συχνότητα

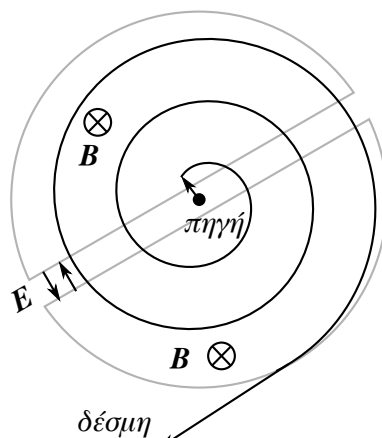
$$\omega = \frac{qB}{m}$$



Σχήμα 2.16

### Εφαρμογή : Κύκλοτρο

Συσκευή επιτάχυνσης φορτισμένων σωματιδίων (Lawrence - Livingston, 1931).



Σχήμα 2.17

Διαφορά δυναμικού από εναλλασσόμενο ηλεκτρικό πεδίο με συχνότητα την κυκλοτρονική συχνότητα

$$\omega_c = \frac{qB}{M}$$



Η δέσμη κάθε φορά παίρνει ενέργεια και μεγαλώνει η ακτίνα κίνησης, σπειροειδής τροχιά

$$R = \frac{M}{qB} v_{\Delta\epsilon\sigma\mu\eta\varsigma}$$

Η τελική ενέργεια της Δέσμης εξαρτάται από την ακτίνα του κυκλότρου  $R_c$  και το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο

$$v_{\Delta\epsilon\sigma\mu\eta\varsigma} = \omega_c R_c, \quad \omega_c = \frac{qB}{M}$$

$$E_{\text{Εν. Δέσμης}} = \frac{1}{2} M v_{\Delta}^2$$

πρωτόνιο,

$$\omega_c = 10^8 \text{ rad/sec}, \quad R_c = 0,5 \text{ m}$$

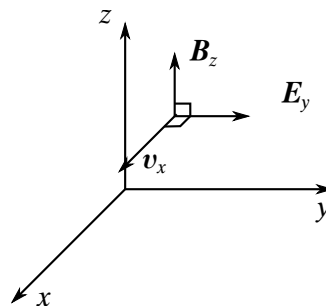
$$\Rightarrow E_{\Delta} \simeq 2,5 \times 10^{-12} \text{ joule} \simeq 15 \text{ MeV}$$

$$v_{\Delta} = \omega R_c \simeq 5 \times 10^7 \text{ m/sec}$$

### Πρόβλημα 8

Φορτισμένο σωματίδιο κινείται κατά τη διεύθυνση  $x$  σε μια περιοχή που υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο  $E_y$  και κάθετο μαγνητικό πεδίο  $B_z$ .

- (α) Ποια είναι η αναγκαία συνθήκη ώστε η συνισταμένη δύναμη να είναι μηδέν;  
 (β) Εάν  $E_y = 3 \times 10^5 \text{ Volt/m}$ ,  $B_z = 3 \times 10^{-2} \text{ T}$ , να προσδιορίσετε την ταχύτητα κίνησης.



Σχήμα 2.18

Λύση:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{F} = 0 &\Rightarrow \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{v} \times \mathbf{B} = -\mathbf{E} \end{aligned}$$

(α)

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = 0 - v_x B_z \hat{y} + 0 \\ \mathbf{E} &= E_y \hat{y} \Rightarrow E_y = v_x B_z \\ &\Rightarrow v_x = \frac{E_y}{B_z} \end{aligned}$$

(β)

$$v_x = \frac{3 \cdot 10^5 \text{ Nt/Cb}}{3 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Nt sec}}{\text{Cb m}}} = 10^7 \text{ m/sec}$$

## 2.8 Διατήρηση της ορμής - Εσωτερικές δυνάμεις

### 2.8.1 Αρχή διατήρησης της ορμής

Σε ένα απομονωμένο σύστημα όπου δρουν μόνο εσωτερικές δυνάμεις, μεταξύ των σωματιδίων του συστήματος, η ολική ορμή διατηρείται σταθερή, ανεξάρτητη του χρόνου.

$$\mathbf{p}_k = m_k \mathbf{v}_k$$

$$\mathbf{p}_{\text{ολ}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_N$$

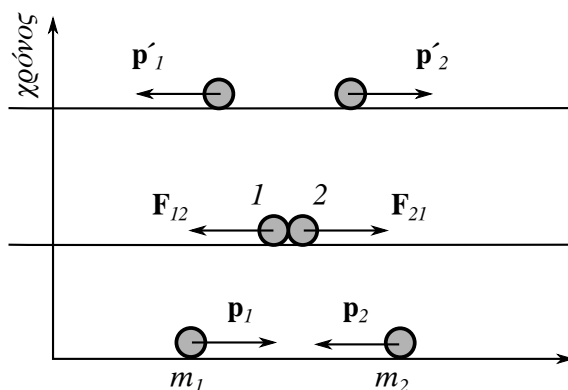
$$\frac{d\mathbf{p}_{\text{ολ}}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \dots + \frac{d\mathbf{p}_N}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_N = \mathbf{F}_{\text{ολ}}$$

$$\mathbf{F}_{\text{ολ}} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{p}_{\text{ολ}}}{dt} = 0$$

όπου  $\mathbf{F}_k$  είναι η δύναμη που ασκείται στο σώμα  $k$  από τα υπόλοιπα σώματα του συστήματος.

#### Ανάλυση για δύο σώματα (κρούση)

Εφαρμογή του τρίτου νόμου του Νεύτωνα



Σχήμα 2.19

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} \quad (\text{εσωτερικές δυνάμεις})$$

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{d\mathbf{p}_2}{dt}, \quad \mathbf{F}_{12} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{P}_{\text{ολ}}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \quad \text{μετά την κρούση}$$

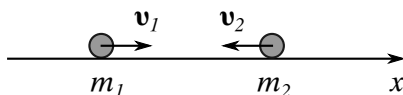
Η ολική ορμή διατηρείται ανεξάρτητη από τη διατήρηση ή μη της ολικής ενέργειας.

Εάν έχουμε π.χ. παραμορφώσεις των σωμάτων, η ολική (κινητική) ενέργεια δεν διατηρείται.

Η αρχή διατήρησης της ορμής δεν αρκεί για να λύσουμε μονοσήμαντα ένα πρόβλημα ορμής.

#### Παράδειγμα 1

Μονοδιάστατη κίνηση, μετά την κρούση οι δύο μάζες ενώνονται σε ένα σώμα (πλαστική κρούση):



Σχήμα 2.20

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = (M_1 + M_2) u$$

$$\frac{M_1 v_1 - M_2 v_2}{M_1 + M_2} = u, \quad \text{αλγεβρικά}$$

### Παράδειγμα 2

Μετά την κρούση, το πρώτο σωματίδιο μένει ακίνητο (ανάκρουση):

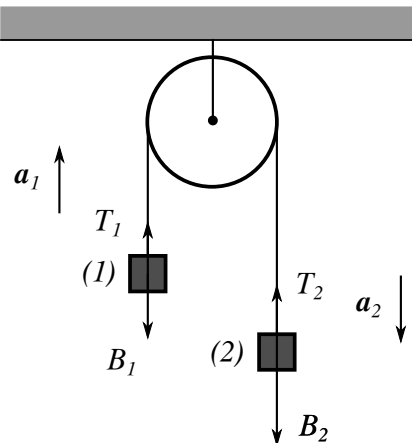
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

$$u_1 = 0 \Rightarrow m_2 u_2 = m_1 v_1 - m_2 v_2 \quad \text{αλγεβρικά}$$

$$u_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1 - v_2 > 0$$

Αναγκαία συνθήκη για να κινηθεί το δεύτερο σώμα προς τα δεξιά.

### Εφαρμογή : Μηχανή του Atwood



Σχήμα 2.21

Τροχαλία χωρίς βάρος,  $m_{\text{τροχαλίας}} = 0$ . Το νήμα δεν έχει μάζα και δεν τεντώνεται.

$$a_1 = a_2$$

$$T_1 = T_2 = T$$

$$T_1 + B_1 = m_1 a_1$$

$$T_2 + B_2 = m_2 a_2$$

επομένως

$$T - m_1 g = m_1 a \quad (2.15)$$

$$m_2 g - T = m_2 a \quad (2.16)$$

Προσθέτουμε τις σχέσεις (2.15) και (2.16) κατά μέλη, οπότε παίρνουμε

$$m_2 g - m_1 g = (m_1 + m_2) a \Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$

$$a > 0 \Rightarrow m_2 > m_1$$

$$T = m_1 a + m_1 g = m_1 \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g + m_1 g$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

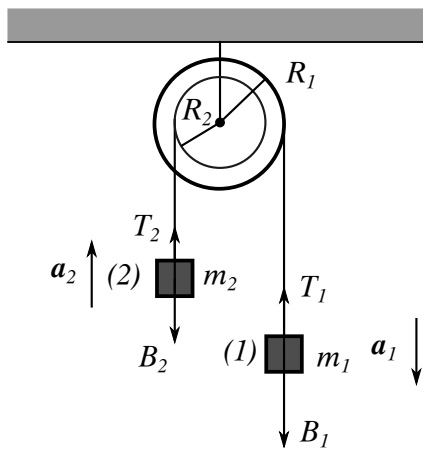
Έχουμε επίσης

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\text{ολ}} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 a t \hat{z} - m_2 a t \hat{z} \\ \Rightarrow \mathbf{p}_{\text{ολ}} &= -\frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} g t \hat{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{ολ}} &= \frac{d\mathbf{p}_{\text{ολ}}}{dt} = -\frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} g \hat{z} \\ \Rightarrow \mathbf{F}_{\text{ολ}} &= 2\mathbf{T} + \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \end{aligned}$$

### Πρόβλημα 9

Δύο σώματα με μάζες  $m_1$  και  $m_2$  κρέμονται από δύο ενσωματωμένες τροχαλίες ακτίνων  $R_1$  και  $R_2$ . Οι τροχαλίες και το σκοινί είναι αβαρή. Αμελούμε τις τριβές. Να βρεθεί η επιτάχυνση κάθε σώματος.



Σχήμα 2.22

$$T_1 R_1 = T_2 R_2$$

Η τροχαλία στρίβει κατά  $d\phi$

$$\begin{cases} ds_1 = R_1 d\phi \\ ds_2 = R_2 d\phi \end{cases} \Rightarrow \frac{ds_1}{ds_2} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Έχουμε ακόμα

$$T_2 + B_2 = m_2 a_2 \quad (2.17)$$

$$T_1 + B_1 = m_1 a_1 \quad (2.18)$$

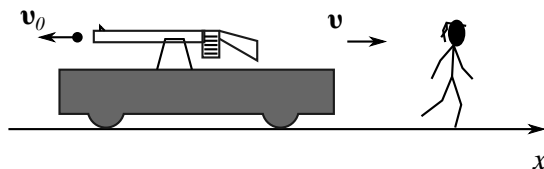
Από τις σχέσεις (2.17) και (2.18) προκύπτουν

$$\begin{cases} T_2 - B_2 = m_2 a_2 \\ B_1 - T_1 = m_1 a_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B_1 \frac{R_1}{R_2} - B_2 = m_2 a_2 + m_1 a_1 \frac{R_1}{R_2}$$

$$m_1 g \frac{R_1}{R_2} - m_2 g = m_2 \frac{R_2}{R_1} a_1 + m_1 a_1 \frac{R_1}{R_2}$$

$$a_1 = \frac{m_1 (R_1/R_2) - m_2}{m_1 (R_1/R_2) + m_2 (R_2/R_1)} g$$



Σχήμα 2.23

**Πρόβλημα 10**

Ένα πολυβόλο στερεωμένο σε πλατφόρμα μάζας  $M_{\pi\lambda}$  βάλει βλήματα με ρυθμό  $N$  και ταχύτητα  $v_0$  ως προς την πλατφόρμα. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του συστήματος με το χρόνο. Η μάζα του βλήματος είναι  $\mu$ .

$$m_{\text{ολ}}(t=0) = m_{\pi\lambda} + m_{\beta\lambda}(t=0) \quad (2.19)$$

$$\frac{dm_{\beta\lambda}}{dt} = -\mu N = -\beta \quad (2.20)$$

Από τις σχέσεις (2.19) και (2.20) παίρνουμε

$$m_{\text{ολ}}(t) = m_{\text{ολ}}(t=0) - \beta t$$

$$dm_{\beta\lambda} = dm_{\text{ολ}}, \quad \frac{dm_{\text{ολ}}}{dt} = -\beta$$

Δυνάμεις εσωτερικές μεταξύ όπλου και βλημάτων  $\Rightarrow$  Διατήρηση ορμής.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\text{ολ}}(t) &= m(t)\mathbf{v}(t) \\ \mathbf{p}_{\text{ολ}}(t+dt) &= \underbrace{(m-dm)}_{\text{προσοχή}}(\mathbf{v}+d\mathbf{v}) + dm(\mathbf{v}+\mathbf{v}_0) \end{aligned}$$

δηλαδή  $dm = |dm_{\text{ολ}}|$  και  $m = m_{\text{ολ}}(t)$

$$\mathbf{p}_{\text{ολ}}(t) = \mathbf{p}_{\text{ολ}}(t+dt) \Rightarrow m d\mathbf{v} + dm\mathbf{v}_0 = 0$$

τα διαφορικά δεύτερης τάξης δεν συμμετέχουν μηδενίζονται στο όριο  $dm \rightarrow 0$  και  $dv \rightarrow 0$

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{v}_0 \frac{dm}{dt} \Rightarrow m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \beta \mathbf{v}_0$$

όπου

$$\beta = \frac{dm}{dt} > 0$$

και το  $\mathbf{v}$  έχει προσανατολισμό προς τα δεξιά  $\mathbf{v} = v\hat{x}$ , ενώ το  $\mathbf{v}_0$  έχει προσανατολισμό προς τα αριστερά  $\mathbf{v}_0 = -v_0\hat{x}$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{\beta v_0}{m(t)} = \frac{\beta v_0}{m_{\text{ολ}}(0) - \beta t}$$

$$\int dv = \beta v_0 \int \frac{dt}{m_{\text{ολ}}(0) - \beta t} + c$$

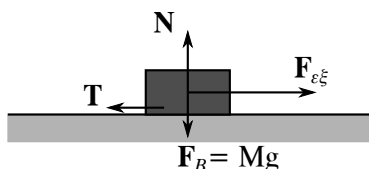
$$v(t) = -v_0 \ln [m_{\text{ολ}}(0) - \beta t] + c$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow c = v_0 \ln m_{\text{ολ}}(0)$$

$$v(t) = v_0 \ln \frac{m_{\text{ολ}}(0)}{|m_{\text{ολ}}(0) - \beta t|}$$

Όταν  $m_{\beta\lambda}(0) - \beta t_0 = 0$ , τότε το σώμα για  $t > t_0$  κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Μέγιστη ταχύτητα  $v = v_0 \ln \frac{m_{\text{ολ}}(0)}{m_{\pi\lambda}}$



Σχήμα 2.24

## 2.9 Δυνάμεις Επαφής - Τριβή

Θεωρούμε τη δύναμη τριβής σταθερή και αντίθετη της κίνησης, όταν το σώμα στο οποίο εφαρμόζεται κινείται. Όταν το σώμα μένει ακίνητο, η δύναμη τριβής είναι τόση όση χρειάζεται για να διατηρηθεί η ισορροπία, όταν αυτή είναι δυνατή.

Η δύναμη τριβής είναι παράλληλη με την επιφάνεια επαφής των δύο σωμάτων.  $N$  είναι η πιέζουσα δύναμη στην επιφάνεια επαφής. Η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η δύναμη τριβής όταν το σώμα είναι ακίνητο και ασκείται σε αυτό εξωτερική δύναμη είναι

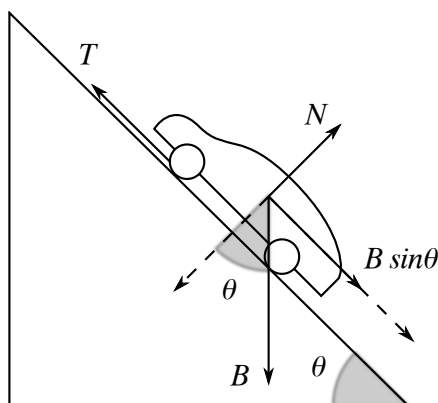
$$T_{\max} = \mu_s N$$

όπου  $\mu_s$  είναι ο συντελεστής στατικής τριβής, σταθερά που εξαρτάται από τις δύο επαπτόμενες επιφάνειες.

Υλικά	$\mu_s$	$\mu_k$
Γυαλί σε Γυαλί	$\sim 1,0$	$\sim 0,5$
Λάστιχο σε Στερεό Σώμα	$\sim 1-4$	--
Πάγος σε Πάγο	$\sim 0,05-0,15$	$\sim 0,03$
Σκι σε ξηρό πάγο	$\sim 0,04$	--
Χάλυβας με χάλυβα	$\sim 0,74$	$\sim 0,57$

Πίνακας 2.1

**Μέτρηση του  $\mu$**  : Από τη γωνία κλίσης  $\theta$  κεκλιμένου επιπέδου με το οριζόντιο επίπεδο.



Σχήμα 2.25

Εάν ο συντελεστής στατικής τριβής  $\mu_s$  είναι γνωστός, η μάζα  $M$  του αυτοκινήτου επίσης, ποια είναι η μεγαλύτερη γωνία  $\theta$  που μπορούμε να έχουμε με το οριζόντιο επίπεδο για να μην αρχίσει να κινείται το αυτοκίνητο; Για την ισορροπία έχουμε

$$N = B \cos \theta_{\max} \quad (2.21)$$

$$T_{\max} = \mu_s N \quad (2.22)$$

$$T_{\max} = B \sin \theta_{\max} \quad (2.23)$$

Από τις σχέσεις (2.21), (2.22) και (2.23) παίρνουμε

$$\mu_s B \cos \theta_{\max} = B \sin \theta_{\max}$$

$$\Rightarrow \mu_s = \frac{\sin \theta_{\max}}{\cos \theta_{\max}} = \tan \theta_{\max}$$

Εάν το σώμα αρχίσει να κινείται π.χ. για γωνία  $\theta > \theta_{\max}$ , τότε η δύναμη τριβής γίνεται

$$T = \mu_k N$$

όπου  $\mu_k \leq \mu_s$  (πειραματικό γεγονός). Το  $\mu_k$  ονομάζεται **συντελεστής τριβής ολίσθησης**.

Πόση είναι τότε η επιτάχυνση του αυτοκινήτου στο κεκλιμένο επίπεδο ;

$$T = \mu_k N, \quad N = B \cos \theta = mg \cos \theta$$

Από το νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$\begin{aligned} B \sin \theta - T &= ma \\ \Rightarrow mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta &= ma \\ \Rightarrow a &= g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta) \end{aligned}$$

Όταν η γωνία  $\theta$  αυξάνεται, το  $\cos \theta$  μειώνεται, ενώ το  $\sin \theta$  αυξάνεται.

Η δύναμη τριβής είναι ανεξάρτητη του εμβαδού των επιφανειών σε επαφή, εξαρτάται μόνο από την πίεση, συνολική δύναμη.

Η δύναμη τριβής οφείλεται στις ηλεκτροστατικές δυνάμεις μεταξύ των επιφανειών των δύο υλικών.

Μεγάλη πίεση συνεπάγεται ότι τα μόρια των δύο επιφανειών έρχονται στενότερα σε επαφή, επομένως αναπτύσσονται ισχυρές ελκτικές δυνάμεις μεταξύ τους.

Τα υλικά που ελαττώνουν τη δύναμη τριβής ανάμεσα σε δύο υλικά είναι πάντοτε διηλεκτρικά υλικά με μεγάλη διηλεκτρική σταθερά.

**Προσοχή:** Επειδή η δύναμη στατικής τριβής είναι λίγο μεγαλύτερη της κινητικής τριβής, τότε μόλις το σώμα υπερνικήσει τη στατική τριβή επιταχύνεται.

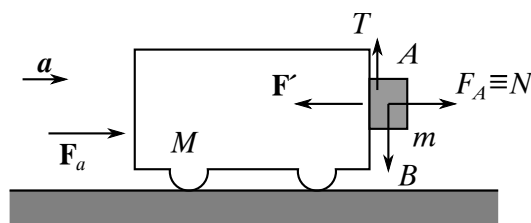
Εάν ελαττώσουμε τη γωνία  $\theta$  του κεκλιμένου επιπέδου τότε υπάρχει μία γωνία  $\theta' < \theta_{\max}$  ώστε  $\mu_k = \tan \theta'$  και τελικά η επιτάχυνση ισούται με μηδέν και το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Πολλά βιβλία δεν ξεχωρίζουν τη στατική τριβή ( $\mu_s$ ) από την κινητική τριβή ( $\mu_k$ ) και δίνουν τον συντελεστή τριβής  $\mu$ .

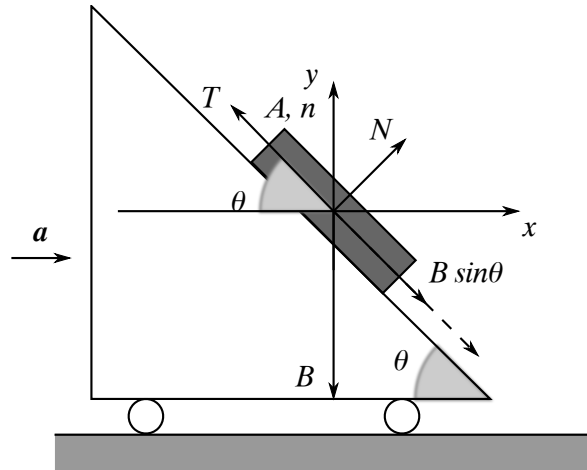
### Πρόβλημα 11

(α) Τι επιτάχυνση πρέπει να έχει το αμαξάκι του σχήματος, ώστε το σώμα Α να παραμείνει προσκολλημένο στην εμπρόσθια κατακόρυφη επιφάνειά του, χωρίς να πέσει; Το  $\mu$  θεωρείται γνωστό (βλ. σχήμα 2.26).

(β) Καρότσι (αμαξάκι) κινείται με επιτάχυνση  $a$  και έχει σχήμα κεκλιμένου επιπέδου. Ποια είναι η ελάχιστη επιτάχυνση που χρειάζεται για να μείνει ακίνητο το σώμα Α (βλ. σχήμα 2.27);



Σχήμα 2.26



Σχήμα 2.27

Λύση:

(α) Για τις δυνάμεις στο σώμα A έχουμε

$$F_A = ma$$

Εφόσον υπάρχει κατακόρυφη ισορροπία, θα ισχύει

$$T = mg$$

και

$$\begin{aligned} T &= \mu N = \mu F_A = \mu ma \\ \Rightarrow \mu ma &= mg \Rightarrow a = \frac{g}{\mu} \end{aligned}$$

Οριζόντιες δυνάμεις στο αμαξάκι:

$$\begin{aligned} F' &= F_A \\ F_a - F' &= Ma \Rightarrow F_a - ma = Ma \Rightarrow F_a = (M + m)a \end{aligned}$$

(β) Ακίνητο το κουτί A ως προς το αμαξάκι (βλ. σχήμα 2.27), εξετάζουμε την περίπτωση όπου  $\tan \theta > \mu$ :

Εάν το αμαξάκι είναι ακίνητο έχουμε  $N = B \cos \theta$  και  $F_{\text{κινούσα}} = B \sin \theta - T$  κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Επειδή  $\tan \theta > \mu$  έχουμε  $\sin \theta > \mu \cos \theta$

$$\Rightarrow F_{\text{κινούσα}} = B \sin \theta - T_{\text{max}} = B \sin \theta - B \mu \cos \theta = B(\sin \theta - \mu \cos \theta) > 0$$

συνάγεται λοιπόν ότι το κουτί A κινείται προς τα κάτω ως προς το αμαξάκι. Αυξάνουμε την επιτάχυνση  $a$  του αμαξιδίου έως ότου το κουτί A ισορροπεί ακίνητο επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.

Κίνηση επιταχυνόμενη στον άξονα  $x$

$$N \sin \theta - T \cos \theta = ma \quad (2.24)$$

$$F_{\text{κινούσα},x} = N \sin \theta - T \cos \theta, \quad T = \mu N \quad (2.25)$$

Ισορροπία στον άξονα  $y$

$$T \sin \theta + N \cos \theta = mg \quad (2.26)$$

Από τις σχέσεις (2.24), (2.25) και (2.26) παίρνουμε

$$\begin{cases} N \sin \theta - \mu N \cos \theta = ma \\ \mu N \sin \theta + N \cos \theta = mg \end{cases}$$



$$\frac{a}{g} = \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta} \Rightarrow a = \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta} g$$

Υπολογισμός της τριβής  $T$

$$\begin{cases} N \sin \theta = ma + T \cos \theta \\ N \cos \theta = mg - T \sin \theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$T = m(g \sin \theta - a \cos \theta), \quad T > 0$$

Για  $\mu < \tan \theta$ , το κουτί Α πέφτει προς τα κάτω στο ακίνητο αμαξάκι όπως είπαμε προηγουμένως, άρα

$$a_{\text{ελαχ}} = \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta} g$$

για να ισορροπεί ακίνητο στο αμαξάκι.

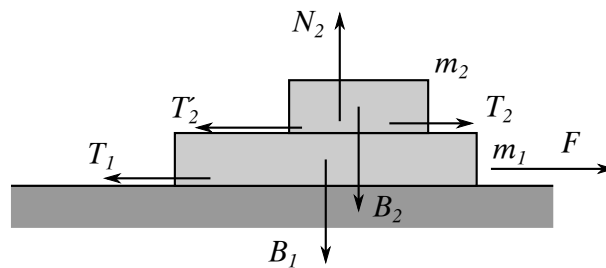
Καθώς αυξάνεται το  $a$ , η τριβή  $T$  ελαττώνεται τείνοντας στο μηδέν, και οριακά για επιτάχυνση  $a_0 = g \tan \theta$  έχουμε  $T = 0$ .

Για επιτάχυνση  $a > a_0$  η τριβή γίνεται αρνητική (προς τα κάτω), διότι το κουτί τείνει να κινηθεί προς τα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.

### Πρόβλημα 12

Σώμα μάζας  $m_1$  έλκεται από δύναμη  $F$ . Επάνω του υπάρχει άλλο σώμα μάζας  $m_2$ . Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ όλων των επιφανειών είναι  $\mu$ , βρείτε τις επιταχύνσεις κάθε σώματος.

Λύση:



Σχήμα 2.28

Για το σώμα (2) η δύναμη που το κινεί είναι η δύναμη της τριβής  $T_2$

$$T_2 = m_2 a_2$$

$$N_2 = B_2, \quad T_2 = \mu N_2 = \mu B_2 \quad (\text{οριακά όταν το σώμα 2 ολισθαίνει ως προς το 1})$$

$$\Rightarrow \mu m_2 g = m_2 a_2 \Rightarrow a_2 = \mu g$$

Για το σώμα (1) έχουμε

$$F - T_1 - T_2' = m_1 a_1$$

$$T_2' = T_2 = \mu m_2 g, \quad T_1 = \mu N_1 = \mu(B_1 + B_2) \quad (\text{οριακά όταν το σώμα 1 κινείται})$$

$$F - \mu g(m_1 + m_2) - \mu g m_2 = m_1 a_1$$

$$a_1 = \frac{F}{m_1} - \mu g - 2\mu g \frac{m_2}{m_1}$$

### Παρατηρήσεις - περιπτώσεις

$$A. \quad T_2 \leq T_{2,\text{max}}, \quad T_2 = T_2'$$

$$\begin{cases} F - T_1 - T_2 = m_1 a_1 \\ T_2 = m_2 a_2 \end{cases}$$

**Η επιτάχυνση  $a_2$  είναι αρχικά ίση με  $a_1$ .** Καθώς η δύναμη  $F$  μεγαλώνει, μεγαλώνει και η  $a_1$  και η  $a_2$ , άρα και η  $T_2$  μέχρι τη μέγιστη τιμή,  $T_{2,\text{max}}$ . **Για ακόμα μεγαλύτερη  $F$  παίρνουμε  $a_1 > a_2$ , και το σώμα (2) ολισθαίνει προς τα πίσω ως προς το (1).**

B. Εάν  $a_1 = a_2 = a \Rightarrow T_2 = T_2' = m_2 a_2 = m_2 a$

$$\Rightarrow F - T_1 = (m_1 + m_2)a$$

$$T_1 = \mu g(m_1 + m_2) \quad (\text{οριακά})$$

Γ. Εάν  $a_1 > a_2$

$$\Rightarrow \frac{F}{m_1} - \mu g - 2\mu g \frac{m_2}{m_1} > \mu g$$

$$\Rightarrow F > 2\mu g(m_1 + m_2)$$

Δ. Αν αμελήσουμε την τριβή με το έδαφος, για ποια τιμή της δύναμης  $F$  το σώμα μάζας  $m_2$  θα αρχίσει να ολισθαίνει ως προς το μεγάλο σώμα μάζας  $m_1$ ;

$$\left. \begin{aligned} F - T_2 &= m_1 a_1 \\ T_2 &= m_2 a_2 \end{aligned} \right\} \quad a_1 \geq a_2$$

$$\frac{F}{m_1} - \frac{T_2}{m_1} \geq \frac{T_2}{m_2} \Rightarrow \frac{F}{m_1} \geq T_2 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

$$\frac{F}{m_1} \geq \mu m_2 g \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \Rightarrow F \geq \mu g(m_1 + m_2)$$

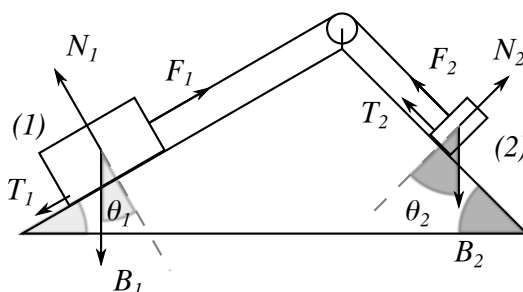
και η δύναμη τριβής έχει πάρει τη μέγιστη τιμή της,  $T_2 = \mu m_2 g$ .

Όταν τα σώματα κινούνται με την ίδια επιτάχυνση

$$T_2 = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2}$$

### Πρόβλημα 13

Βρείτε τις επιταχύνσεις των δύο σωμάτων (1) και (2) στο σχήμα ( $m_2 > m_1$ ). Συντελεστές τριβής  $\mu_1$  και  $\mu_2$  στις δύο πλευρές του τριγώνου.



Σχήμα 2.29

Έχουμε

$$F_1 = F_2 = F, \quad \text{εσωτερικές δυνάμεις}$$

$$T_1 = \mu_1 N_1, \quad T_2 = \mu_2 N_2$$

$$N_1 = B_1 \cos \theta_1, \quad N_2 = B_2 \cos \theta_2$$

Για το σώμα (1) έχουμε:

$$F - T_1 - B_1 \sin \theta_1 = m_1 a$$

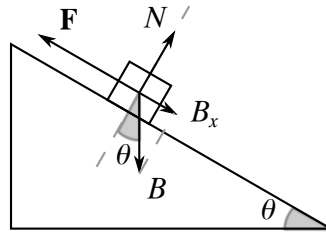
$$F - \mu_1 B_1 \cos \theta_1 - B_1 \sin \theta_1 = m_1 a$$

Για το σώμα (2):

$$B_2 \sin \theta_2 - T_2 - F = m_2 a$$

$$B_2 \sin \theta_2 - \mu_2 B_2 \cos \theta_2 - F = m_2 a$$

Έχουμε δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους, βρίσκουμε τα  $F$  και  $a$ .



Σχήμα 2.30

**Πρόβλημα 14**

Σε ένα σώμα μάζας  $m$  επάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο ασκείται δύναμη  $F$ . Βρείτε τη διεύθυνση κίνησης του σώματος και την επιτάχυνση. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι  $\mu$ . Η  $F$  επάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.

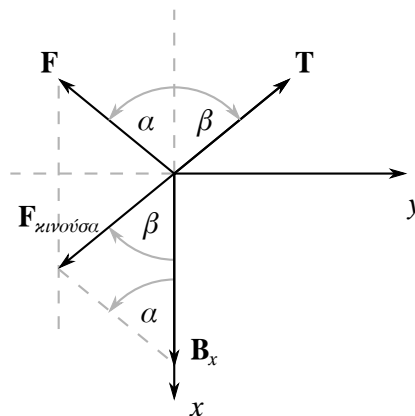
Κάθετα στο κεκλιμένο επίπεδο :

$$N = B \cos \theta$$

$$T = \mu N = \mu B \cos \theta$$

Παράλληλα στο κεκλιμένο επίπεδο :

$$B_x = B \sin \theta$$



Σχήμα 2.31: (επί του κεκλιμένου επιπέδου)

$$F + T + B_x = ma$$

Η δύναμη  $F$  δοσμένη κατά μέτρο και διεύθυνση. Από τα παραπάνω προκύπτουν

$$T \cos \beta + F \cos \alpha - B_x = ma_x$$

$$F \sin \alpha - T \sin \beta = ma_y$$

Τρεις άγνωστοι  $a_x$ ,  $a_y$  και γωνία  $\beta$ . Η δύναμη τριβής αντίθετη στην κατεύθυνση κίνησης, άρα παίρνουμε το άθροισμα

$$F + B_x = F_{\text{κινούσα}}$$

και βρίσκουμε τη γωνία  $\beta$

$$F_k^2 = F^2 + B_x^2 - 2FB_x \cos \alpha$$

$$\frac{F}{\sin \beta} = \frac{F_k}{\sin \alpha} \Rightarrow \sin \beta = \frac{F}{F_k} \sin \alpha$$

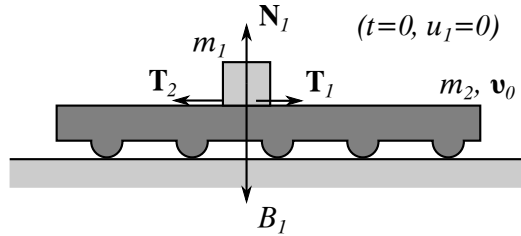
Έχουμε

$$a_x = a \cos \beta, \quad a_y = a \sin \beta$$

Επιλύουμε μία από τις δύο εξισώσεις και υπολογίζουμε την επιτάχυνση  $a$ .

**Πρόβλημα 15**

Σώμα μάζας  $m_1$  τοποθετείται κάθετα (με αρχική ταχύτητα μηδέν) επάνω σε κινούμενη πλατφόρμα μάζας  $m_2$  και ταχύτητας  $v_0$ . Βρείτε την τελική ταχύτητα του συστήματος των δύο σωμάτων. Συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των δύο σωμάτων  $\mu$ .

**Σχήμα 2.32**

Για το σώμα (1) έχουμε

$$T_1 = \mu N_1 = \mu B_1 = \mu m_1 g$$

$$T_1 = m_1 a_1 \Rightarrow a_1 = \mu g, \quad \text{επιτάχυνση}$$

Για το σώμα (2):

$$T_2 = m_2 a_2 \Rightarrow \mu m_1 g = m_2 a_2$$

$$\Rightarrow a_2 = \mu g \frac{m_1}{m_2}, \quad \text{επιβράδυνση}$$

Έχουμε

$$v_1 = a_1 t \tag{2.27}$$

$$v_2 = v_0 - a_2 t \tag{2.28}$$

Από τις σχέσεις (2.27) και (2.28) έχουμε ότι κάποια χρονική στιγμή ισχύει

$$v_1 = v_2 = u$$

δηλαδή τα δύο σώματα κινούνται τελικά με την ίδια ταχύτητα, και

$$a_1 t_0 = v_0 - a_2 t_0$$

$$t_0 = \frac{v_0}{a_1 + a_2} = \frac{v_0}{\mu g + \mu g (m_1/m_2)}$$

**Κοινή ταχύτητα** για  $t \geq t_0$ :

$$u = a_1 t_0 = \frac{v_0 \mu g}{\mu g (1 + (m_1/m_2))} = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow m_2 v_0 = (m_1 + m_2) u$$

Αρχή διατήρησης της ορμής

Εσωτερικές δυνάμεις ( $T_1, T_2 = -T_1$ )

$$p_{\text{προ}} = p_{\text{μετά}} \Rightarrow m_2 v_0 = (m_1 + m_2) u$$

**Πρόβλημα 16**

Λωρίδα κινείται με σταθερή ταχύτητα  $v$ , ενώ άμμος τοποθετείται επάνω της με σταθερό ρυθμό  $\rho$  Kg/sec.

Πόση δύναμη απαιτείται για να κινείται η λωρίδα με σταθερή ταχύτητα ;

Λύση:

$$p(t) = m(t)v$$

$$dp = p(t+dt) - p(t) = m(t+dt)v - m(t)v$$

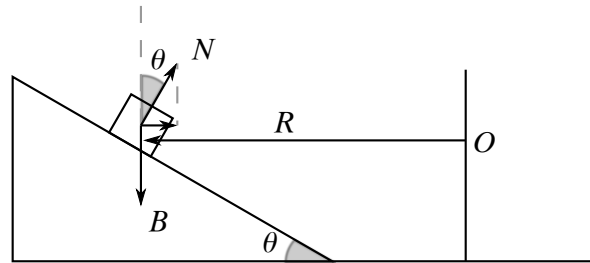
$$m(t+dt) = m(t) + dm$$

$$dp = dm v \Rightarrow \frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt} v, \quad \frac{dm}{dt} = \rho$$

$$\Rightarrow F = \frac{dp}{dt} = \rho v$$

### Πρόβλημα 17: Κίνηση αυτοκινήτου σε στροφή

#### A. Χωρίς τριβή



Σχήμα 2.33

Το σώμα κάνει κυκλική κίνηση με ακτίνα  $R$  και ταχύτητα  $u$ .  
Στον κατακόρυφο άξονα έχουμε ισορροπία:

$$N \cos \theta = B = mg$$

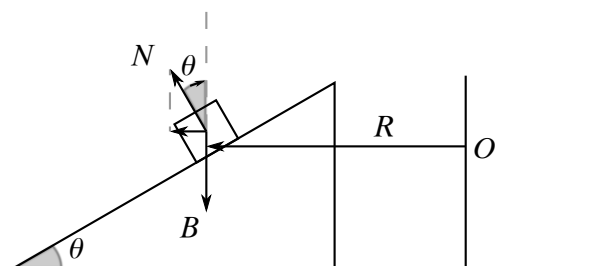
Στον οριζόντιο άξονα έχουμε κυκλική κίνηση:

$$\mathbf{a}_k = -\frac{u^2}{R} \hat{\mathbf{R}}$$

$$N \sin \theta = m \frac{u^2}{R}, \quad N = \frac{mg}{\cos \theta}$$

$$mg \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{mu^2}{R} \Rightarrow u^2 = Rg \tan \theta$$

#### Ανάποδη κλίση



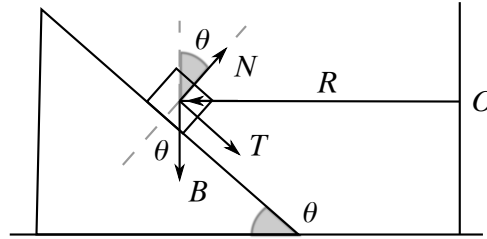
Σχήμα 2.34

$$N \cos \theta = B = mg$$

$$\mathbf{a}_k = -\frac{u^2}{R} \hat{\mathbf{R}}$$

$$N \sin \theta = -\frac{mu^2}{R}$$

το οποίο είναι αδύνατο! Το αυτοκίνητο δεν συγκρατείται στη στροφή, κινείται προς τα έξω, εκτός δρόμου.



Σχήμα 2.35

**Β. Με τριβή**

$$T \leq \mu N, \quad \mathbf{a}_k = -\frac{u^2}{R} \hat{\mathbf{R}}$$

Στον κατακόρυφο άξονα έχουμε

$$N \cos \theta - B - T \sin \theta = 0$$

Στον οριζόντιο άξονα έχουμε

$$N \sin \theta + T \cos \theta = m \frac{u^2}{R}$$

Μέγιστη τιμή της τριβής μέγιστη τιμή της ταχύτητας,  $T = \mu N$ .

$$N (\cos \theta - \mu \sin \theta) = B = mg \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos \theta - \mu \sin \theta}$$

$$N (\sin \theta + \mu \cos \theta) = m \frac{u^2}{R}$$

$$g \frac{\sin \theta + \mu \cos \theta}{\cos \theta - \mu \sin \theta} = \frac{u^2}{R}$$

$$\Rightarrow u_{\text{op}}^2 = Rg \frac{\sin \theta + \mu \cos \theta}{\cos \theta - \mu \sin \theta} > u_{(\text{χωρίς τριβή})}^2$$

$$\mu = \tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi}$$

$$u_{\text{op}}^2 = Rg \frac{\sin(\theta + \phi)}{\cos(\theta + \phi)}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \theta \rightarrow \frac{\pi}{2},$$

οδόστρωμα σχεδόν κατακόρυφο.

**Γ. Γωνία  $\theta$  πολύ μεγάλη**

Εάν η γωνία  $\theta + \phi \rightarrow \pi/2$ , τότε η  $u_{\text{op}}^2 \rightarrow \infty$ , ενώ εάν η γωνία  $\theta + \phi > \pi/2$ , τότε η προηγούμενη εξίσωση για το  $u_{\text{op}}^2$  δεν έχει πραγματική λύση. Αυτό μπορεί να σημαίνει ότι η τριβή  $T$  δεν φτάνει ποτέ τη μέγιστη τιμή της, ενώ η οριακή ταχύτητα  $u_{\text{op}}^2 \rightarrow \infty$ .

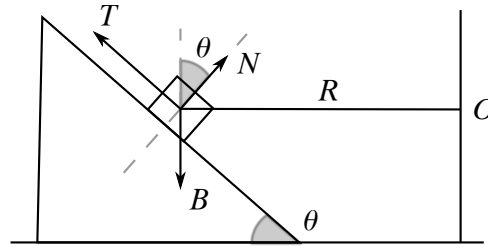
Αλλά εάν η γωνία  $\theta$  είναι μεγάλη, τότε το σώμα ίσως κινείται προς τα κάτω (μέσα μέρος της στροφής) αρχικά, άρα η τριβή προς τα επάνω. Χωρίς ταχύτητα περιστροφής, το σώμα θα έπεφτε.

Το αυτοκίνητο κάνει οριζόντια κυκλική κίνηση με ταχύτητα  $v$  άρα έχει κεντρομόλο επιτάχυνση:

$$\mathbf{a}_k = -m \frac{v^2}{R} \hat{\mathbf{R}}$$

Για την ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα έχουμε

$$N \cos \theta + T \sin \theta = B$$



Σχήμα 2.36

ενώ για την περιστροφή στον οριζόντιο άξονα :

$$N \sin \theta - T \cos \theta = m \frac{v^2}{R}$$

Οριακά  $T = \mu N$ :

$$\Rightarrow v_{\text{οπ}}^2 = Rg \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta}$$

Παρατηρούμε ότι για τις ταχύτητες έχουμε:

$$v_{\text{οπ}}^2 < u_{(\text{χωρίς τριβή})}^2 < u_{\text{οπ}}^2$$

Εάν αυξηθεί το  $v^2 > v_{\text{οπ}}^2$ , τότε  $T < \mu N$  και αυξάνοντας ακόμη το  $v^2$  περνάμε στην περίπτωση Α, όπου  $T = 0$ , και μετά στην περίπτωση Β.

## 2.10 Πεδίο Βαρύτητας από αντικείμενα με διαστάσεις

### Παράδειγμα 1

Δίνεται ομογενής ράβδος μάζας  $M$  και μήκους  $L$ . Να βρεθεί το πεδίο βαρύτητας επάνω στον άξονα της ράβδου σε απόσταση  $s$  από το ένα άκρο της.

Λύση:

Τοποθετούμε τη ράβδο κατά μήκος του άξονα των  $x$  από το σημείο Α για  $x = 0$  ως το σημείο Β για  $x = L$  ενώ στη θέση Γ για  $x = L + s$  τοποθετούμε μία μάζα  $m$ . Θέλουμε να υπολογίσουμε την δύναμη που ασκείται στη μάζα  $m$ .

Η ράβδος είναι ομογενής, άρα χαρακτηρίζεται από σταθερή πυκνότητα μάζας  $\lambda = M/L$  ανά μονάδα μήκους. Το στοιχειώδες τμήμα  $dx$  της ράβδου στην θέση  $x$  έχει μάζα  $dM = \lambda dx$  και ασκεί δύναμη

$$dF = -\frac{GmdM}{r^2}$$

στην μάζα  $m$ . Η απόσταση  $r$  μεταξύ τους είναι  $r = L + s - x$ , όπου  $0 \leq x \leq L$ .

Η συνολική δύναμη  $F$  στην μάζα  $m$  είναι το άθροισμα των στοιχειωδών δυνάμεων  $dF$  καθώς τα στοιχειώδη τμήματα  $dx$  διατρέχουν την ράβδο:

$$F = \sum dF = -\int_0^L \frac{Gm\lambda dx}{(L+s-x)^2} = -Gm\lambda \int_0^L \frac{dx}{(L+s-x)^2} = -Gm\lambda \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{L+s} \right) = -Gm\lambda \frac{L}{s(s+L)}$$

Όριο για  $s \gg L$ , άρα προσεγγιστικά έχουμε  $L + s \simeq s$

$$\Rightarrow F \simeq -Gm\lambda \frac{L}{s^2} = -\frac{GmM}{s^2}$$

Σε πολύ μεγάλες αποστάσεις το πεδίο βαρύτητας της ράβδου είναι ίσο με το πεδίο βαρύτητας σημειακού αντικειμένου μάζας  $M$ .

**Παράδειγμα 2**

Δίνεται ομογενής δακτύλιος μάζας  $M$  ακτίνας  $R$  και αμελητέου πάχους. Να βρεθεί το πεδίο βαρύτητας επάνω στον άξονα που περνάει από το κέντρο του δακτυλίου.

Λύση:

Έστω ότι ονομάζουμε  $z$  τον κατακόρυφο άξονα που περνάει από το κέντρο  $O$  του δακτυλίου. Ζητάμε την δύναμη που ασκείται λόγω βαρύτητας σε μάζα  $m$  στη θέση  $z$  του άξονα.

Παίρνουμε δύο ίσες στοιχειώδεις μάζες  $dM_1, dM_2$  σε αντιδιαμετρικές θέσεις του δακτυλίου. Η δύναμη λόγω βαρύτητας που ασκείται στη μάζα  $m$  λόγω των  $dM_1$  και  $dM_2$  είναι το διανυσματικό άθροισμα των στοιχειωδών δυνάμεων  $dF_1$  και  $dF_2$  αντίστοιχα.

Λόγω συμμετρίας αυτό το άθροισμα έχει συνιστώσα μόνο κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα των  $z$ . Οι συνιστώσες των  $dF_1$  και  $dF_2$  οι κάθετες στον άξονα των  $z$  αλληλοαναφαιρούνται. Άρα για τυχαία στοιχειώδη μάζα  $dM$  του δακτυλίου υπολογίζουμε μόνο την κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης

$$dF_z = -\frac{GmdM}{r^2} \cos \theta$$

όπου  $r^2 = R^2 + z^2$ .

Η γωνία  $\theta$  είναι η γωνία ανάμεσα στην κατακόρυφο και την ευθεία που ενώνει την μάζα  $m$  με την  $dM$ . Άρα για το συνημίτονο αυτής της γωνίας ισχύει:

$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

Για να πάρουμε το τελικό αποτέλεσμα αθροίζουμε σε όλες τις στοιχειώδεις μάζες  $dM$  άρα αθροίζουμε όλες τις κατακόρυφες στοιχειώδεις δυνάμεις  $dF_z$ . Η γωνία  $\theta$  παραμένει η ίδια σε όλη αυτή την διαδικασία.

$$\Rightarrow F_z = \sum dF_z = -\frac{Gm}{R^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \sum dM = -\frac{GmMz}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Παρατηρούμε ότι για  $z = 0$  έχουμε  $F_z = 0$ .

Όριο της δύναμης  $F_z$  για  $z \gg R$  όπου έχουμε προσεγγιστικά  $R^2 + z^2 \simeq z^2$

$$F_z \simeq -\frac{GmMz}{(z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{GmM}{z^2}$$

Άρα μακριά όπως περιμέναμε ο δακτύλιος μοιάζει με ένα σημειακό αντικείμενο.