Συστήματα Αναφοράς, Μετασχηματισμός Γαλιλαίου (1)

Αδρανειακά και Επιταχυνόμενα Συστήματα Αναφοράς

(1)

Οι δύο πρώτοι νόμοι του Νεύτωνα ισχύουν μόνο όταν τα φαινόμενα παρατηρούνται μέσα σε μη επιταχυνόμενα συστήματα αναφοράς.
Τότε ένα σύστημα μένει ακίνητο χωρίς καμία δύναμη.

Αν θέλετε να μείνετε ακίνητος μέσα σε ένα επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς όπως π.χ. η ρόδα του Λούνα-Παρκ ή το λεωφορείο τότε πρέπει να υποστείτε μια Δύναμη, από τον πάτα τα καθίσματα στο λεωφορείο για παράδειγμα.

Ο θεμελιώδης νόμος της Κλασσικής Μηχανικής είναι: $\vec{F} = m\vec{a}$ ή $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ ή $\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

ως προς ποιο σύστημα Αναφοράς μετράμε τα μεγέθη $\vec{a}, \vec{v}, \vec{r}$?

1) Εάν το σύστημα αναφοράς είναι μη επιταχυνόμενο τότε αυτή είναι η σχέση ορισμού της Δύναμης $\vec{F}$.
(πραγματικές Δυνάμεις)

ii) Αντίστροφα: εάν ξέρουμε την πραγματική (αληθινή) δύναμη $\vec{F}$ και σε κάποιο σύστημα αναφοράς ισχύει με ακρίβεια $\vec{F}=m\vec{a}$ τότε αυτό είναι ένα Αδρανειακό σύστημα Αναφοράς. (2)

Η Γη είναι ένα Αδρανειακό σύστημα Αναφοράς?

Η Γη είναι ένα Αδρανειακό σύστημα και ακρίβεια εξαρτάται από το βαθμό προσέγγισης των παραμέτρων.

Η Γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της σε 24 ώρες άρα όλα τα σημεία της Γης έχουν μια γωνιακή ταχύτητα. όταν μετράμε λοιπόν την επιτάχυνση της Βαρύτητας δεν βρίσκουμε σε όλους τους τόπους την ίδια τιμή. Αυτό είναι το φαινόμενο Βάρος και μεταβάλλεται κατά $0{,}034\ \frac{m}{sec^2}$ από τον Ισημερινό έως τους πόλους και ενώ η συνολική μεταβολή είναι $0{,}052\ \frac{m}{sec^2}$ το υπόλοιπο οφείλεται στο ελλειπτικό σχήμα της Γης.

Βόρειος Πόλος $\quad g_{\Pi} = 9{,}8324\ \frac{m}{sec^2}$

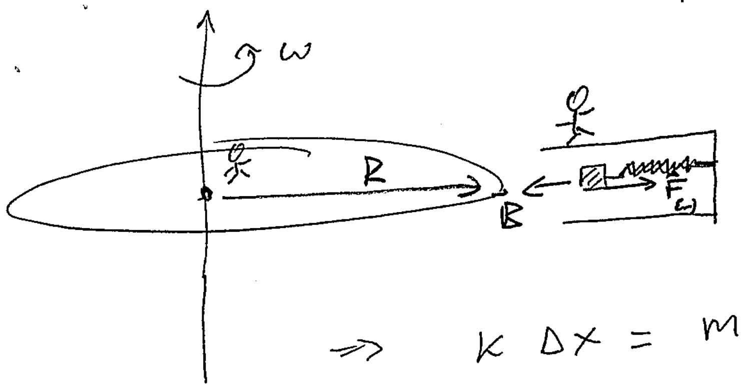
Ισημερινός $\quad g_{I} = 9{,}7810\ \frac{m}{sec^2}$

Ένας απλός τρόπος μέτρησης του g:

Μέτρηση του g στον Ισημερινό.

Ένα σώμα βρίσκεται σε ισορροπία κρεμασμένο από ένα ελατήριο:

Παρατηρητής στο κέντρο της Γης;



(3)

$$\vec{B}+\vec{F}_{ελ} = m\vec{a}_κ$$

$$-mg + k\Delta x = -m\omega^2 R$$

$$\Rightarrow k\Delta x = m(g-\omega^2 R)$$

Η δύναμη του ελατηρίου $F_{ελ} = k\Delta x$ είναι αυτό που εμείς ονομάζουμε Βάρος (Φαινόμενο Βάρος) άρα μας δίνει επιτάχυνση σε αυτόν τον τόπο ~~την~~ μετρούμενη της Βαρύτητος

$$g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow g_{Ισημερινό} = g - \omega^2 R$$

Μέτρηση του g στον πόλο: $g_{πόλο} = g$

Ποιο σύστημα Αναφοράς είναι πρακτικά Αδρανειακό?

Το σύστημα των Απλανών Αστέρων (Αστέρια με επιτάχυνση πειραματικά μηδέν, $< 10^{-6}\frac{m}{sec^2}$) (Χωρίς Απόδειξη)

Η κεντρομόλος επιτάχυνση ενός σημείου της Γης ως προς το κέντρο της είναι $\cong 0{,}034 \frac{m}{sec^2}$.

Η επιτάχυνση της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι μια τάξη μεγέθους μικρότερη $\cong 0{,}006 \frac{m}{sec^2}$

Επιτάχυνση του Ήλιου ως προς το κέντρο του Γαλαξία $\simeq 3 * 10^{-10} \frac{m}{sec^2}$ (Δεν είναι ανιχνεύσιμη) (Αμελητέα) $a_κ = \frac{v^2}{R}$

Φαινόμενο Doppler δίνει ταχύτητα του Ηλίου ως προς το κέντρο του Γαλαξία $\simeq 3 * 10^5 \frac{m}{sec}$. ($R \simeq 3 * 10^{20} m$)

2 Απόδειξη και Σχετική Επιτάχυνση

Μπορούμε λοιπόν να βρούμε ένα Αδρανειακό σύστημα Αναφοράς μέσα στο οποίο ισχύει $\vec{F} = m\vec{a}$ με μεγάλη ακρίβεια.

Οι δυνάμεις (Βαρυτικές, Ηλεκτρικές) που έχουμε επικαλεστεί για να εξηγήσουμε την κίνηση των άστρων και των ηλεκτρονίων μειώνονται συνεχώς (ανάλογα του τετράγωνα της απόστασης) όσο το σώμα απομακρύνεται από τα γειτονικά του σώματα.

Εαν Διαλέξουμε ένα μη αδρανειακό σύστημα Αναφοράς, Φαίνονται να αναπτύσσονται Δυνάμεις που δεν έχουν αυτές τις ιδιότητα.

Εμφανίζονται λοιπόν Υποθετικές Δυνάμεις που υπάρχουν μόνο και μόνο επειδή το σύστημα Αναφοράς είναι Επιταχυνόμενο.

Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς:

$$\vec{F} = m\vec{a}_I$$

$\vec{a}_I$ = Επιτάχυνση που μετρά ένας παρατηρητής σε Αδρανειακό (Inertial) σύστημα αναφοράς.

Επιταχυνόμενο σύστημα Αναφοράς με Επιτάχυνση $\vec{a}_0$.

Το σώμα που κινείται έχει επιτάχυνση $\vec{a}$ ως προς το Δεύτερο σύστημα $\Rightarrow$ $\vec{a}_I = \vec{a} + \vec{a}_0$

$$\Rightarrow \vec{F} = m(\vec{a} + \vec{a}_0)$$

⇒ $m\vec{a} = \vec{F} - m\vec{a}_0$

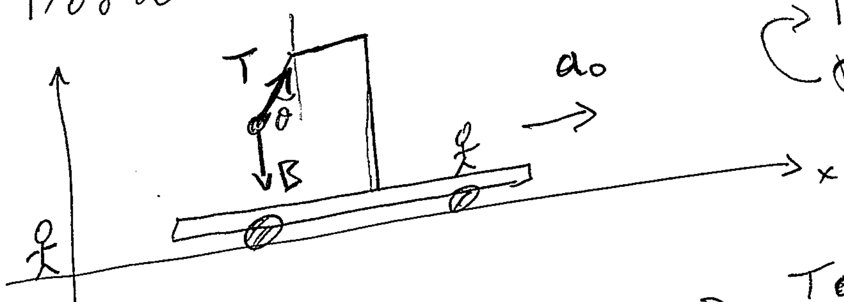
⇒ Εμφάνιση Υποθετικής Δύναμης (Δύναμη Αδράνειας) $\vec{F}_0 = -m\vec{a}_0$

Εάν $\vec{a}=0$ ⇒ $\vec{F}+\vec{F}_0 = 0$ — Ισορροπία μέσα στο επιταχυνόμενο σύστημα Αναφοράς.

Παραδείγματα:

Εκκρεμές κρέμεται κατακόρυφα σε όχημα που ηρεμεί. Όταν το όχημα κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με επιτάχυνση $a_0 = 1\,\frac{m}{sec^2}$, με ποια γωνία ως προς την κατακόρυφο κρέμεται το εκκρεμές? Πόση είναι η υποθετική δύναμη αδράνειας?

$\vec{T}+\vec{B} = m\vec{a}_0$ για τον "ακίνητο" παρατηρητή



Ισορροπία κατακόρυφη → $T\,\text{συν}\theta = B = mg$

οριζόντια κίνηση → $T\,\text{ημ}\theta = m a_0$

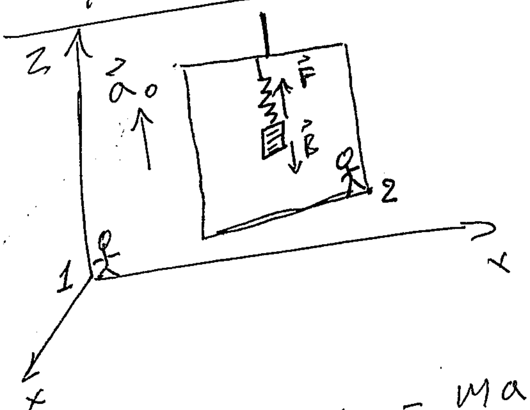
⇒ $\boxed{\text{εφ}\,\theta = \frac{a_0}{g}}$

Για τον κινούμενο με επιτάχυνση a_0 παρατηρητή $\vec{F}_0 = -m a_0 \hat{x}$

$\vec{T}+\vec{B}+\vec{F}_0 = 0$

Τι είναι η F_0? Πού οφείλεται? Πουθενά!!!!

Παρατηρητής μέσα σε Ανελκυστήρα



Παρατηρητής 1

$$\boxed{\vec{F}+\vec{B}=m\vec{a}_1}$$

$$\begin{cases} \vec{F}=k\Delta\ell\,\hat{z} \\ \vec{B}=-mg\,\hat{z} \\ \vec{a}_1=a_0\hat{z} \end{cases}$$

Το σώμα ακίνητο μέσα στον ανελκυστήρα

$$k\Delta\ell - mg = ma_0 \Leftarrow$$

$$\boxed{k\Delta\ell = m(a_0+g)}$$

Εαν $a_0=-g \Rightarrow \Delta\ell=0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ελεύθερη} \\ \text{πτώση} \end{array}\right.$

Παρατηρητής 2

$$\vec{F}+\vec{B}+\vec{F}_0=0 \Leftarrow \vec{F}+\vec{B}_{\varphi\alpha\iota\nu o\mu\varepsilon\nu o}=0$$

$$\vec{B}_{\varphi\alpha\iota\nu o\mu\varepsilon\nu o}=\vec{B}+\vec{F}_0$$

$$\vec{F}_0=-m\vec{a}_0 \quad , \quad \vec{B}_{\varphi\alpha\iota\nu o\mu\varepsilon\nu o}$$

Σύστημα που περιστρέφεται (με ω = σταθερο)

Ενα βιβλιο βρισκεται επανω σε ενα τραπεζι

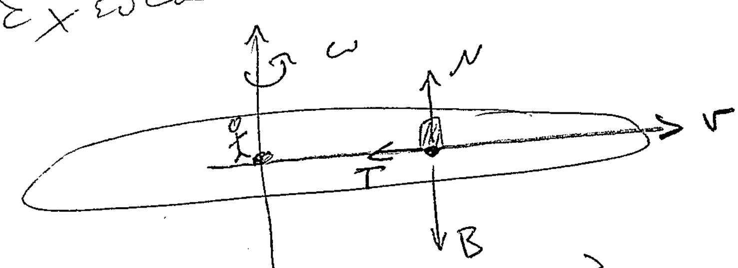
Θελουμε το βιβλιο να παραμενει ακινητο ως προς το τραπεζι οταν αυτο περιστρεφεται με $\omega=20\frac{\sigma\tau\rho}{\lambda\varepsilon\pi\tau o}$

Το βιβλιο απεχει αποσταση $R=1{,}5\,m$ απο τον αξονα περιστροφης, που ειναι κατακορυφος.

Ποσος ειναι συντελεστης τριβης?

Σχεδιασε την δυναμη τριβης.

Σχεδιασε την Φυγόκεντρο Δύναμη. $\Big\}$ συναρτηση της αποστασης r.



$$\vec{T}=-T\hat{r}$$

$$N=B$$

$$\vec{T}=m\vec{a}_\kappa$$

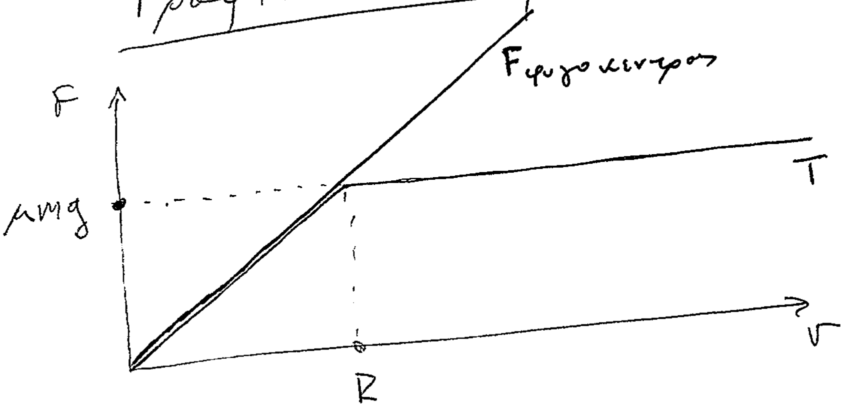
$$\vec{a}_\kappa=-m\omega^2R\,\hat{r}$$

$$T_{max}=\mu N=\mu B$$

1

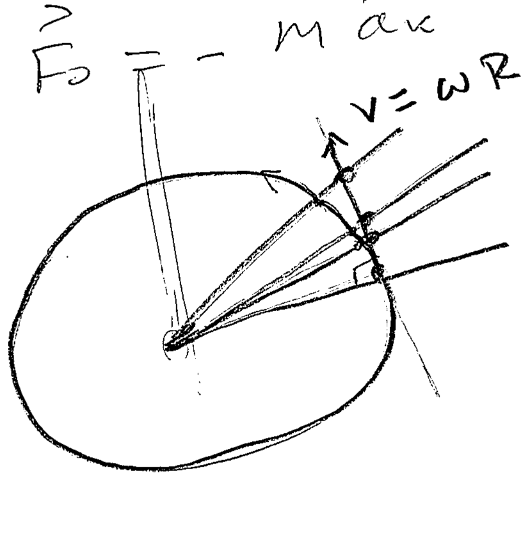
$$\mu m g = m \omega^2 R \Rightarrow \boxed{\mu g = \omega^2 R}$$

Γραφική Παράσταση



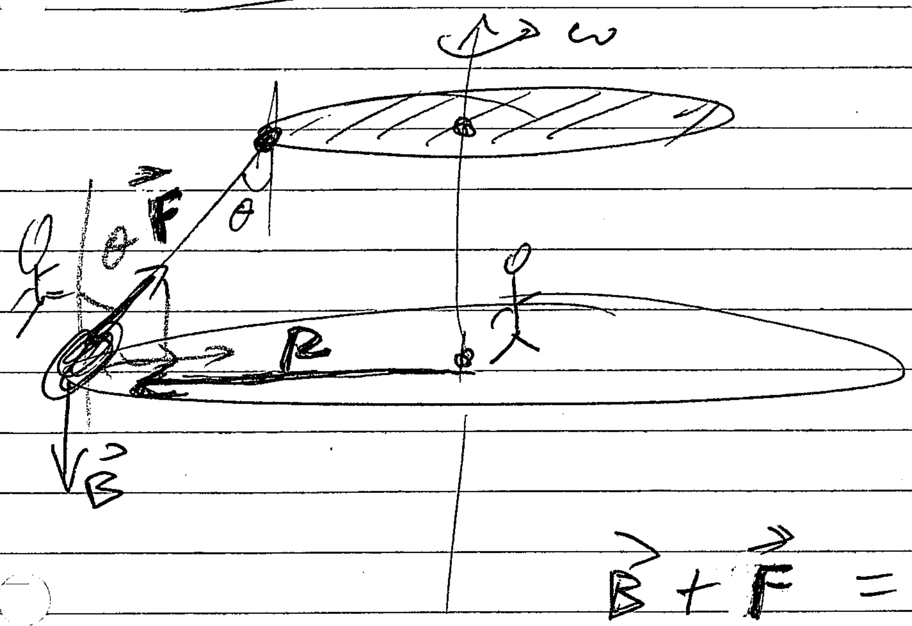
Για να παραμείνει ακίνητο το σώμα επάνω στον περιστρεφόμενο Δίσκο χρειάζεται μια Δύναμη.
Το σώμα έχει την τάση να κινηθεί εφαπτομενικά, δηλαδή κατά μήκος της ταχύτητας, και έτσι απομακρύνεται από το κέντρο της τροχιάς.
Στιγμιαία η κίνηση είναι ακτινική για κάποιον που περιστρέφεται με το επίπεδο, άρα η τριβή είναι ακτινική.
Η τάση του σώματος να κινηθεί "ακτινικά" αποδίδεται σε μία δύναμη δηλαδή προς τα έξω (Υποθετική Δύναμη όπως λέμε) Φυγόκεντρο Δύναμη $\vec{F}_o = m\omega^2 r\,\hat{r}$

την $\vec{F}_o = -m\vec{a}_\kappa$



για πολύ μικρό χρονικό (Δt) διάστημα το τόξο και η ευθύγραμμη κίνηση ταυτίζονται.

Περιστρεφόμενο σύστημα Αναφοράς



Αδρανειακός παρατηρητής

$\vec{a}_K = -m\frac{v^2}{R}\hat{R}$

$\vec{a}_K = -m\omega^2 R\,\hat{R}$

$\vec{a}_K = -m\omega^2 \vec{R}$

$$\vec{B} + \vec{F} = m\vec{a}_K$$

$\Rightarrow \begin{cases} F\cos\theta = B & \Rightarrow F\cos\theta = mg \\ F\sin\theta = m\omega^2 R & \Rightarrow mg\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = m\omega^2 R \end{cases}$

$\tan\theta = \omega^2 R g$

Εάν η γωνία ~~περιστροφής~~ απόκλισης είναι θ τότε η περίοδος περιστροφής

είναι $\omega^2 = \frac{Rg}{\tan\theta} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{Rg}{\tan\theta} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2\tan\theta}{Rg}}$

ανεξάρτητη της μάζας.

Μη Αδρανειακός

$F\cos\theta = mg$

$F\sin\theta = F_{φυγόκεντρη}$

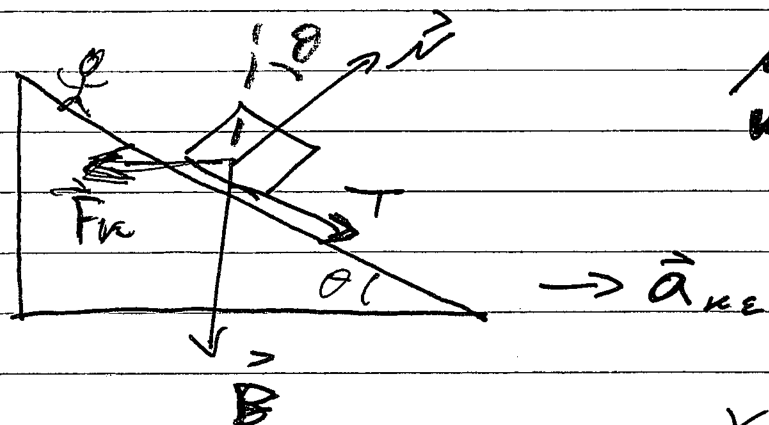
$\vec{F} + \vec{B} + \vec{F}_\varphi = 0$

$\vec{F}_\varphi = m\omega^2 R\,\hat{R}$

$\vec{F}_\varphi = -m\vec{a}_K$

προς τα έξω

Ένα κουτί μάζας M είναι ακίνητο σε επιταχυνόμενο όχημα, σχήματος κεκλιμένου επιπέδου. Εάν ο συντελεστής τριβής μεταξύ κουτιού και κεκλιμένου επιπέδου είναι μ.



(a) Να βρείτε την μέγιστη επιτάχυνση $a_{κε}$ για να μένει ακίνητο το κουτί στο κινούμενο κεκλιμένο επίπεδο.

Λύση:

Σχεδιάστε την υποθετική δύναμη $\vec{F}_κ$:

$$\vec{F}_κ = -M\vec{a}_{κε}$$

$$\vec{F}_κ + \vec{N} + \vec{T} + \vec{B} = 0, \qquad T_{max} = \mu N$$

(b) Εάν η επιτάχυνση του κεκλ. επιπέδου γίνει μεγαλύτερη, με πόση επιτάχυνση κινείται το κουτί ως προς το κ. επίπεδο;

Λύση:

$$\vec{F}_κ + \vec{N} + \vec{T} + \vec{B} = M\vec{a}$$

$\vec{a} \parallel$ στο κεκλιμένο επίπεδο

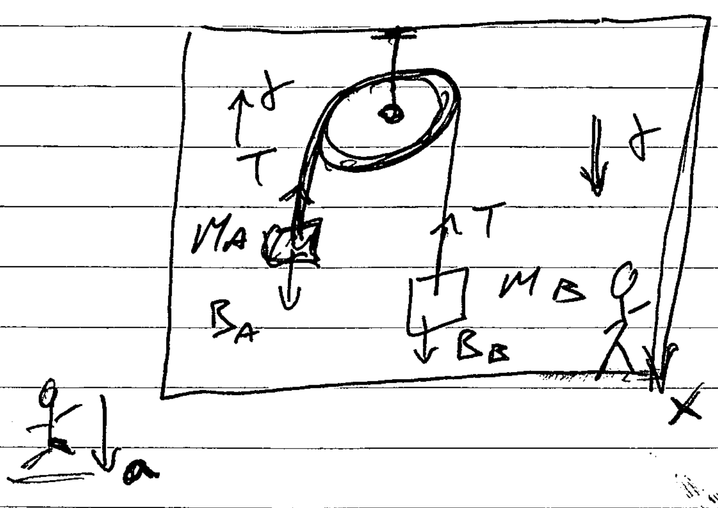
$$T = T_{max} = \mu N$$

Κάθετα στο κεκλ. επίπεδο: $N = B\cos\theta + F_κ\sin\theta$

Παράλληλα : $Ma = -T - B\sin\theta + F_κ\cos\theta$

$$\Rightarrow a = a_{κε}(\cos\theta - \mu\sin\theta) - g(\sin\theta + \mu\cos\theta).$$

Μηχανή του Atwood



Ο ανελκυστήρας κινείται προς τα κάτω με επιτάχυνση $\vec{a}$. Βρείτε την επιτάχυνση των δύο μαζών.

μη-αδρανειακός παρατηρητής

Θέτω επιτάχυνση γ

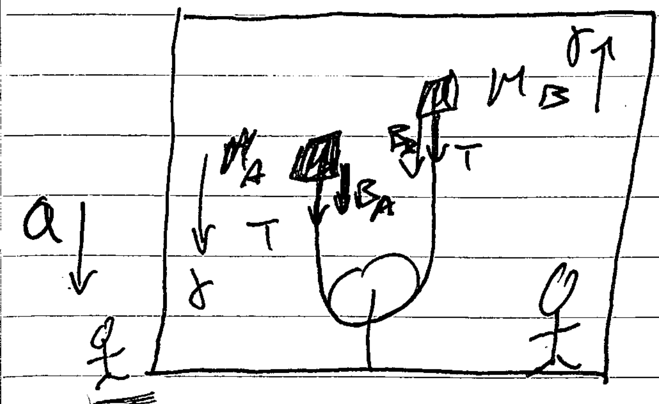
Σώμα A: $T + m_A a - m_A g = m_A \gamma$

Σώμα B: $T + m_B a - m_B g = -m_B \gamma$

$$(m_A - m_B)(a-g) = (m_A + m_B)\gamma$$

$$\boxed{\gamma = \frac{m_B - m_A}{m_B + m_A}(g-a)} \qquad a \leq g$$

$a > g \Rightarrow$?



A: $T + m_A g - m_A a = m_A \gamma$

$-T - m_B g + m_B a = m_B \gamma$

$(m_A - m_B)g - (m_A - m_B)a =$

$= (m_A + m_B)\gamma$

$a \geq g$

$$\gamma = \frac{(m_A - m_B)(g-a)}{m_A + m_B} = \frac{(m_B - m_A)(a-g)}{m_B + m_A}$$

Απόλυτη και Σχετική Ταχύτητα

Σύμφωνα με όλα τα πειράματα που έχουν γίνει ως τώρα η Απόλυτη Ταχύτητα δεν έχει κανένα φυσικό νόημα.

Θεμελιώδης υπόθεση του Γαλιλαίου:

Οι Βασικοί Νόμοι της Φυσικής είναι Ταυτόσημοι για όλα τα Συστήματα Αναφοράς που κινούνται με Ομοιόμορφη Ταχύτητα το ένα ως προς το άλλο.

Παρατηρητής σε Εργαστήριο χωρίς Παράθυρα δεν μπορεί να αποφανθεί εάν κινείται ή είναι ακίνητος (σταθερή ταχύτητα) ως προς το Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς των Απλανών Αστέρων.

Εάν λοιπόν δύο Παρατηρητές παρακολουθούν κάποιο φαινόμενο, και κινούνται με σχετική Ταχύτητα σταθερή τότε με τη Βοήθεια των Νόμων της Φυσικής μπορούμε να προβλέψουμε τις μετρήσεις του Δεύτερου Παρατηρητή εάν ξέρουμε τις μετρήσεις του πρώτου.

(4) Μετασχηματισμός Γαλιλαίου

Έχουμε δύο Αδρανειακά Καρτεσιανά Συστήματα Συντεταγμένων S και S'.

Παίρνουμε για απλότητα $x \parallel x'$, $y \parallel y'$, $z \parallel z'$.

το S' κινείται ως προς το S με $\vec{V} = V\hat{x}$

και $V =$ σταθερή εννοείται.

A) Εαν έχουμε δύο σειρές ρολόγια που είναι πανομοιότυπα, μια σειρά στο S και μία στο S' κατα μήκος των αξόνων x και x' και συγχρονισμένα μεταξύ τους, δείχνουν όλα την ίδια ώρα για κάθε σύστημα αναφοράς.

Τότε μπορούμε να συγκρίνουμε την ένδειξη των ρολογιών του S' με τα ρολόγια του S

και έχουμε $\underline{t' \equiv t}$

όταν βέβαια $V \ll 3 \times 10^{8} \frac{m}{sec} = c$

π.χ. $V = 10^{4} \frac{m}{sec}$

B) Εαν έχουμε έναν χάρακα μήκους L' όπως τον μετράμε στο σύστημα S' όπου είναι ακίνητος τότε ορίζοντας σαν μήκος L του χάρακα στο σύστημα S την θέση των άκρων του την ίδια χρονική στιγμή, έχουμε

$$\underline{L \equiv L'}$$

Εξισώσεις μετασχηματισμού Γαλιλαίου

αν $t'=0$ όταν $t=0$ και τα άκρα των δύο συστημάτων ταυτίζονται τότε:

$$t = t', \quad x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z'$$

Άρα για την πρόσθεση των ταχυτήτων έχουμε

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt'} = \frac{dx'}{dt'} + V = u'_x + V$$

$$u_y = u'_y$$

$$u_z = u'_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u} = \vec{u}' + \vec{V}}$$

ακόμη $\Delta \vec{u} = \Delta \vec{u}' \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}'$

$$\Rightarrow \vec{F}' = m\vec{a}' = m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t}, \quad \vec{a}' = \frac{\Delta \vec{u}'}{\Delta t'}, \quad \Delta t = \Delta t'$$

Διατήρηση της Ορμής

Ο νόμος Διατήρησης της Ορμής "Αποδείχθηκε" χρησιμοποιώντας την Αρχή της Δράσης-Αντίδρασης που απαιτεί Άπειρη ταχύτητα Αλληλεπίδρασης.

(Α) Μπορούμε να τον Ξαναδιατυπώσουμε ή "αποδείξουμε" από την Αρχή του Γαλιλαίου για το Αναλλοίωτο και τις αρχές Διατήρησης Ενέργειας και Μάζας.

Έστω δύο σώματα 1 και 2 αρχικά $\vec{V}_1$ και $\vec{V}_2$ Ευθύγραμμα με ταχύτητες $\vec{w}_1$ και $\vec{w}_2$ μετά την κρούση έχουν ταχύτητες (σύστημα S):

Νόμος Διατήρησης της Ενέργειας (σύστημα S):

$$\frac{1}{2} M_1 V_1^2 + \frac{1}{2} M_2 V_2^2 = \frac{1}{2} M_1 W_1^2 + \frac{1}{2} M_2 W_2^2 + \Delta E \qquad (1)$$

η ενέργεια ΔE παριστάνει την μεταβολή στην εσωτερική ενέργεια των δύο σωμάτων και είναι αναλλοίωτη ποσότητα όπως δείχνει το πείραμα.

Νόμος Διατήρησης της Ενέργειας (σύστημα S'):

$$\frac{1}{2} M_1 V_1'^2 + \frac{1}{2} M_2 V_2'^2 = \frac{1}{2} M_1 W_1'^2 + \frac{1}{2} M_2 W_2'^2 + \Delta E \qquad (2)$$

Μετασχηματισμοί Ταχυτήτων (μεταξύ S και S'):

$$\vec{V}_1 = \vec{V} + \vec{V}_1' \qquad \vec{W}_1 = \vec{V} + \vec{W}_1' \qquad (3)$$

$$\vec{V}_2 = \vec{V} + \vec{V}_2' \qquad \vec{W}_2 = \vec{V} + \vec{W}_2'$$

Αντικαθιστούμε την (3) στην (2), δεχόμαστε την (1) και παίρνουμε:

$$(M_1 \vec{V_1} + M_2 \vec{V_2}) \cdot \vec{V} = (M_1 \vec{W_1} + M_2 \vec{W_2}) \cdot \vec{V}$$

για κάθε $\vec{V}$. Άρα:

$$M_1 \vec{V_1} + M_2 \vec{V_2} = M_1 \vec{W_1} + M_2 \vec{W_2}$$

Αρχή Διατήρησης της Ορμής.

⇒ Αναλλοίωτο + Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας
⟺ Αρχή Διατήρησης της Ορμής

(B) Εάν σε ένα σύστημα έχουμε:
1) Αρχή Διατήρησης Ενέργειας
2) Αρχή Διατήρησης Ορμής

και Αναλλοίωτο των Νόμων σύμφωνα με τους Μετασχηματισμούς Γαλιλαίου για δύο Αδρανειακά Συστήματα Αναφοράς.

⇒ Αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα (1) + (2) σε οποιοδήποτε άλλο Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς.

Άσκηση — Εφαρμογή

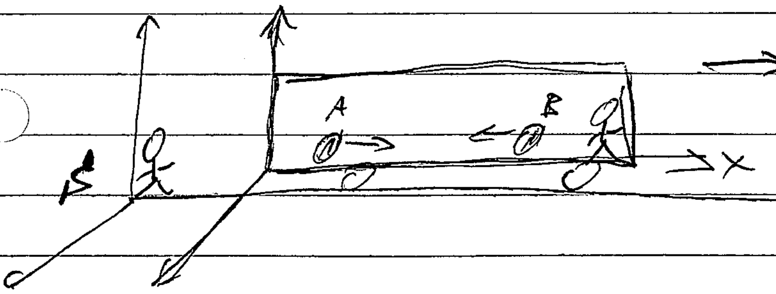
Μέσα σε ένα όχημα που κινείται σε σιδηροτροχιές ~~σε~~ ευθεία γραμμή και με ταχύτητα $5 \frac{m}{sec}$ έχουμε κρούση μιας μάζας (A) 0,1 Kgr που κινείται με ταχύτητα $1 \frac{m}{s}$ με την ίδια κατεύθυνση με το τρένο με μια δεύτερη μάζα (B) 0,05 Kgr που κινείται με ταχύτητα $5 \frac{m}{sec}$ σε κατεύθυνση αντίθετη του τρένου.

Οι ταχύτητες των δύο μαζών αναφέρονται ως προς το τρένο.

Μετά την κρούση η μάζα (B) βρίσκεται ακίνητη μέσα στο όχημα.

(a) Ποια είναι η ταχύτητα της μάζας (A)?
Πόση κινητική ενέργεια χάθηκε?

(b) Τι βλέπει ένας παρατηρητής ακίνητος ως προς τις σιδηροτροχιές?



$\longrightarrow \vec{V}_{ox} = \left(5 \frac{m}{sec}\right) \hat{x}$

(a) $\vec{V}_A = 1 \frac{m}{sec} \hat{x}$ | $\vec{V}_A' = ; = -1.5 \frac{m}{sec} \hat{x}$

$\vec{V}_B = -5 \frac{m}{sec} \hat{x}$ | $\vec{V}_B' = 0$

προ — μετά

Διατήρηση ορμής: $m_A \vec{V}_A + m_B \vec{V}_B = m_A \vec{V}_A' + m_B \vec{V}_B'$

$0.1 * 1 - 0.05 * 5 = 0.1 * V_A' + 0 \Longrightarrow V_A' = \frac{0.1 - 0.25}{0.1} = \frac{-0.15}{0.1}$

$$E_{\kappa\iota\nu}(\pi\rho o) = \frac{1}{2} m_A V_A^2 + \frac{1}{2} m_B V_B^2 = \frac{1350}{2000} \underbrace{kg \frac{m^2}{sec^2}}_{Joule}$$

$$E_{\kappa\iota\nu}(\mu\varepsilon\tau\alpha) = \frac{1}{2} m_A V_A'^2 + \frac{1}{2} m_B V_B'^2 = \frac{225}{2000} \text{ Joule}$$

$$\Delta E_\kappa = E_\kappa(\mu\varepsilon\tau\alpha) - E_\kappa(\pi\rho o) = -\frac{1125}{2000} \text{ Joule}$$

$\Delta E_\kappa < 0 \Rightarrow$ χάθηκε ενέργεια

(β) Ακίνητος Παρατηρητής

$$\vec{u}_A = \vec{V}_{ox} + \vec{V}_A = 6 \frac{m}{sec} \hat{x}$$

$$\vec{u}_B = \vec{V}_{ox} + \vec{V}_B = 0$$

$$\vec{u}_A' = \vec{V}_{ox} + \vec{V}_A' = 3.5 \frac{m}{sec} \hat{x}$$

$$\vec{u}_B' = \vec{V}_{ox} + \vec{V}_B' = 5 \frac{m}{sec} \hat{x}$$

$\vec{P}_{\pi\rho o} = \vec{P}_{\mu\varepsilon\tau\alpha}$ ~~μας~~ δίνει τα ίδια αποτελέσματα

$$E_\kappa^{\varsigma'}(\pi\rho o) = \frac{1}{2} m_A u_A^2 + \frac{1}{2} m_B u_B^2 = \frac{3600}{2000} \text{ Joule}$$

$$E_\kappa^{\varsigma'}(\mu\varepsilon\tau\alpha) = \frac{1}{2} m_A u_A'^2 + \frac{1}{2} m_B u_B'^2 = \frac{2475}{2000} \text{ Joule}$$

$$\Delta E_\kappa^{\varsigma'} = E_\kappa(\mu\varepsilon\tau\alpha) - E_\kappa(\pi\rho o) = -\frac{1125}{2000}$$

$$\Delta E_\kappa^{\varsigma'} = \Delta E_\kappa(\tau\rho\varepsilon\nu o).$$

Χάθηκε ενέργεια κατά την κρούση από τις εσωτερικές δυνάμεις τριβής, πραγματικές δυνάμεις.

Περιστρεφόμενα ⑱

⑥ Συστήματα Αναφοράς

Δύναμη Coriolis

Προβλήματα σχετικά

① Ένα έντομο κινείται με ταχύτητα V κατά μήκος ράβδου που περιστρέφεται γύρω από το ένα άκρο της, ο άξονας περιστροφής είναι κάθετος της ράβδου. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου ως προς την επιφάνεια της Γης είναι ω. Υπολογίστε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του εντόμου ως προς την επιφάνεια της Γης.

② Λεπτή ράβδος μήκους L περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, σε οριζόντιο επίπεδο, γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της. Κατά μήκος της ράβδου κυλά, χωρίς τριβή, σφαιρίδιο μάζας m το οποίο ξεκινά από το σταθερό άκρο της ράβδου με αρχική ταχύτητα Vo. Πότε φθάνει στο L;

③ Πόση είναι η οριζόντια απόκλιση ενός σώματος που πέφτει κατακόρυφα στον Ισημερινό λόγω της επιτάχυνσης Coriolis;

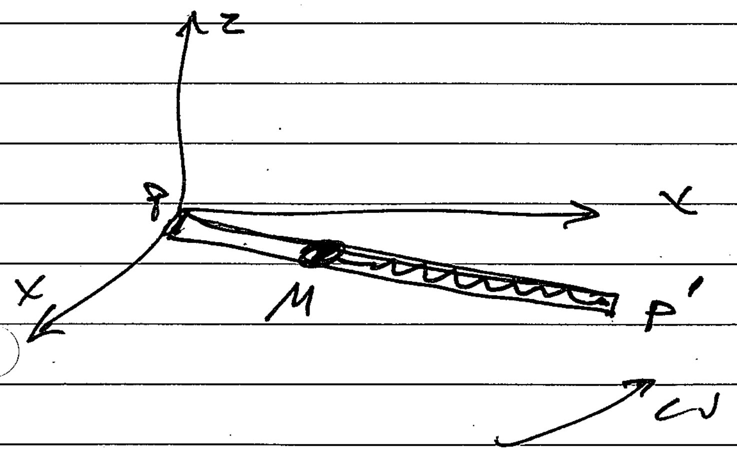
④ Λεπτή ράβδος μήκους $L=1m$ περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 10 \frac{rad}{sec}$, σε οριζόντιο επίπεδο, γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της B. Σε εσωτερική ορθογώνια εσοχή και κατά μήκος της ράβδου μπορεί να κυλά, χωρίς τριβή, σφαιρίδιο μάζας $M = 1kgr$. Το σφαιρίδιο είναι προσαρτημένο στην άκρη αβαρούς ελατηρίου φυσικού μήκους $L/2$ και σταθεράς $k = 1200 \frac{Nt}{m}$. Το άλλο άκρο του ελατηρίου έχει καρφωθεί στο περιστρεφόμενο άκρο B της ράβδου. Έστω ότι την χρονική στιγμή $t=0$ το σφαιρίδιο βρίσκεται σε απόσταση $\frac{L}{5}$ από το P και έχει ταχύτητα $V_0 = 5\frac{m}{sec}$ με φορά από το P προς το P'.

(α) Υπολογίστε και σχεδιάστε τις δυνάμεις που δέχεται το σφαιρίδιο για $t=0$ όπως αυτές τις μετράει ακίνητος παρατηρητής O.

(β) Υπολογίστε και σχεδιάστε τις δυνάμεις που δέχεται το σφαιρίδιο για $t=0$ όπως αυτές τις μετράει παρατηρητής Π που περιστρέφεται μαζί με την ράβδο.

(γ) Δείξτε ότι σύμφωνα με τον Π η ολική δύναμη που ασκείται στο σφαιρίδιο μηδενίζεται όταν αυτό βρίσκεται σε κάποιο σημείο A της ράβδου.

(δ) Δείξτε ότι η κίνηση του σφαιριδίου ως προς τον παρατηρητή Π είναι αρμονική ταλάντωση γύρω από το σημείο A και βρείτε την κυκλική της συχνότητα.



$PP' = L$

Δύναμη Coriolis

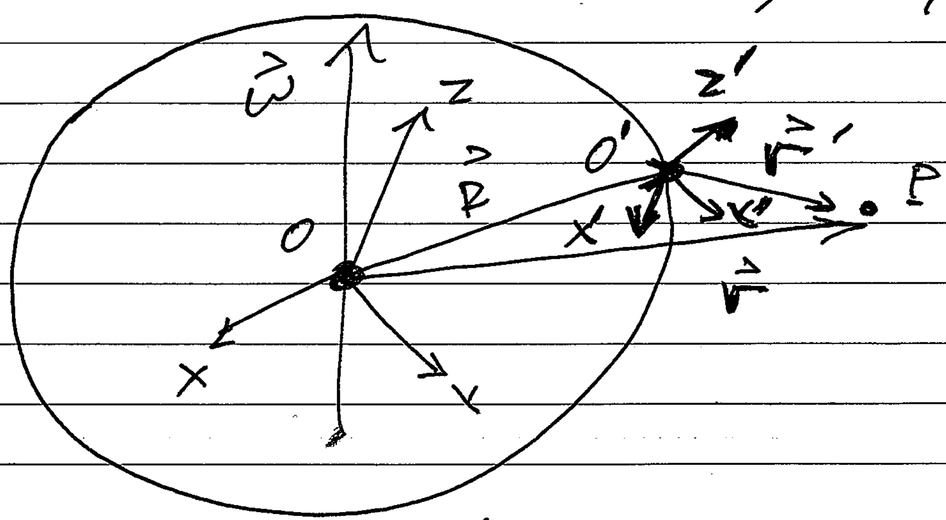
Έστω ένα στερεό σώμα (π.χ. η Γη) το οποίο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από ένα σταθερό σημείο O

Στο σημείο P ένα σωματίδιο κινείται με ταχύτητα $\vec{u}$ ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς (x, y, z)

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Πόση είναι η ταχύτητα του σωματιδίου στο σημείο P ως προς το τοπικό περιστρεφόμενο, με το στερεό σώμα, σύστημα αναφοράς (x', y', z');

Πως συνδέονται οι δύο μετρήσεις;



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$$

$$\vec{r}\,' = x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'$$

$\vec{u} = \left(\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right)_0$ η ταχύτητα του P ως προς τον O.

$\vec{V} = \frac{dx'}{dt}\hat{x}' + \frac{dy'}{dt}\hat{y}' + \frac{dz'}{dt}\hat{z}'$ η ταχύτητα του P ως προς το τοπικό σύστημα αναφοράς O'.

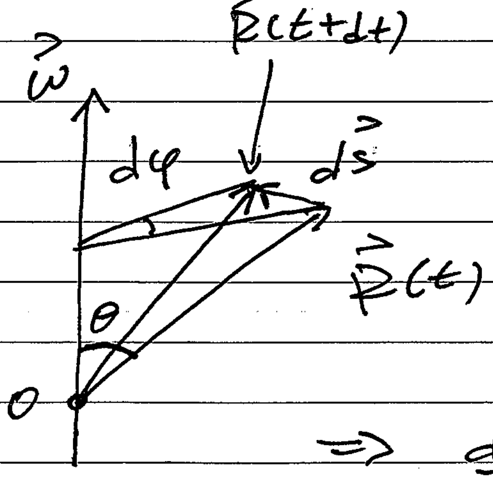
$$\Rightarrow \quad \vec{V} = \left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{O'}$$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_O = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_O + \vec{V} + \underbrace{x'\frac{d\hat{x}'}{dt} + y'\frac{d\hat{y}'}{dt} + z'\frac{d\hat{z}'}{dt}}_{\text{Μεταβολή του } \vec{r}\,' \text{ λόγω της περιστροφής του } O'}$$

Είναι ισοδύναμο με την περιστροφή του O' ως προς το P κατά $(-\vec{\omega})$ θεωρώντας το P στιγμιαία ακίνητο $= \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$

$$\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_O = \vec{\omega} \times \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{u} = V + \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

διότι $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$.



$$ds = R\sin\theta \, d\varphi$$

$$\frac{ds}{dt} = R\sin\theta \frac{d\varphi}{dt} = R\sin\theta \, \omega$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{R}, \quad d\vec{s} \perp (\vec{\omega}, \vec{R})$$

$$d\vec{s} = \vec{R}(t+dt) - \vec{R}(t) = d\vec{R}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_O = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

19β

Πόση είναι η επιτάχυνση του σωματιδίου στο σύστημα O';
Πως συνδέονται οι μετρήσεις στα δύο συστήματα O και O';

$$\vec{a} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_O$$ η επιτάχυνση του σωματιδίου P στο "αδρανειακό" σύστημα αναφοράς O

η επιτάχυνση $\vec{\gamma}$ στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς O':

$$\vec{\gamma} = \frac{dV_x'}{dt}\hat{x}' + \frac{dV_y'}{dt}\hat{y}' + \frac{dV_z}{dt}\hat{z}' = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{O'}$$

είναι η μεταβολή της ταχύτητος V ως προς τον O'.

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_O = \underbrace{\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_O}_{(\ast)} + \vec{\omega}\times\underbrace{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_O}_{(\vec{V}+\vec{\omega}\times\vec{r})}$$ διότι υποθέσαμε $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_O = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{V}$$

$\vec{\omega}\times\vec{V}$ είναι η μεταβολή της ταχύτητας του σωματιδίου P ως προς τον χρόνο λόγω περιστροφής του συστήματος αναφοράς υποθέτοντας ότι στιγμιαία το P έχει σταθερή ταχύτητα $\vec{V}$ ως προς το κινούμενο σύστημα αναφοράς.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{\gamma} + 2(\vec{\omega}\times\vec{V}) + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}$$

$\vec F = m\vec a \Rightarrow \vec F = m\vec\gamma + 2m\vec\omega\times\vec v + m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)$

20

$$\Rightarrow \boxed{m\vec\gamma = \vec F - 2m\vec\omega\times\vec v - m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)}$$

$\vec F_{Coriolis} = -2m\vec\omega\times\vec v$

$\vec v$ = ταχύτητα κίνησης ως προς την περιστρεφόμενη Γη

$\vec\omega$ = Διάνυσμα περιστροφής της Γης.

$\vec F_{φυγόκεντρη} = -m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)$ είναι η Φυγόκεντρη Δύναμη λόγω περιστροφής

$\vec\gamma$ = επιτάχυνση στο Κινούμενο Σύστημα Αναφοράς.

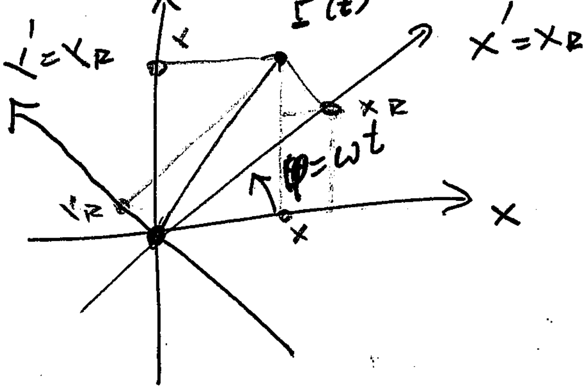
Εφαρμογή: $\vec\omega = \omega\hat z$

Σχετική κίνηση επάνω στο επίπεδο (x, y) της Γης, ή να το θέσουμε αλλιώς γύρω από τον Ισημερινό της Γης.

ω = σταθερό.

$\vec r = x\hat x + y\hat y = x_R\hat x' + y_R\hat y'$

το σημείο P έχει συντεταγμένες (x, y) ή $(x', y') = (x_R, y_R)$



$$\begin{cases} x = x_R\cos\omega t - y_R\sin\omega t \\ y = x_R\sin\omega t + y_R\cos\omega t \\ z = z_R \end{cases}$$

ξέρω τα μοναδιαία διανύσματα

Ταχύτητα: $\Rightarrow$ $\frac{dx}{dt} = \dot x$, $\frac{dy}{dt} = \dot y$

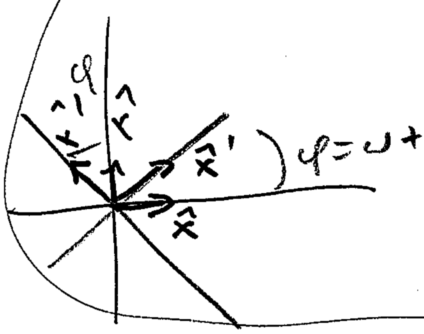
$$\begin{cases} \dot x = \dot x_R\cos\omega t - x_R\omega\sin\omega t - \dot y_R\sin\omega t - y_R\omega\cos\omega t \\ \dot y = \dot x_R\sin\omega t + x_R\omega\cos\omega t + \dot y_R\cos\omega t - y_R\omega\sin\omega t \end{cases}$$

$\vec u = \dot x\hat x + \dot y\hat y = \dot x_R\hat x' + \dot y_R\hat y' + \vec\omega\times\vec r = \vec v + \vec\omega\times\vec r$

21

$$\ddot{X} = \ddot{X}_R \cos\omega t - 2\omega\dot{X}_R \sin\omega t - \omega^2 X_R \cos\omega t$$
$$- \ddot{Y}_R \sin\omega t - 2\omega\dot{Y}_R \cos\omega t + \omega^2 Y_R \sin\omega t$$

$$\ddot{Y} = \ddot{X}_R \sin\omega t + 2\omega\dot{X}_R \cos\omega t - \omega^2 X_R \sin\omega t$$
$$+ \ddot{Y}_R \cos\omega t - 2\omega\dot{Y}_R \sin\omega t - \omega^2 Y_R \cos\omega t$$



$$\hat{x}' = \hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t$$
$$\hat{y}' = -\hat{x}\sin\omega t + \hat{y}\cos\omega t$$
$$\hat{x}' = a\,\hat{x} + b\,\hat{y}$$
$$a = \hat{x}'\cdot\hat{x} = \cos\varphi = \cos\omega t, \quad b = \hat{y}\cdot\hat{x}' = \sin\varphi = \sin\omega t$$

$$\vec{a} = \ddot{X}\,\hat{x} + \ddot{Y}\,\hat{y} = \ddot{X}_R\,\hat{x}' + \ddot{Y}_R\,\hat{y}'$$
$$+ 2\omega\dot{X}_R\,\hat{y}' - 2\omega\dot{Y}_R\,\hat{x}'$$
$$- \omega^2 X_R\,\hat{x}' - \omega^2 Y_R\,\hat{y}' =$$
$$= \vec{\gamma} + 2\,\vec{\omega}\times\vec{v} - \omega^2\vec{r} \qquad \vec{v} = \dot{X}_R\hat{x}' + \dot{Y}_R\hat{y}'$$

$$\vec{\omega}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x}' & \hat{y}' & \hat{z}' \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{X}_R & \dot{Y}_R & 0 \end{vmatrix} = -\hat{x}'\,\omega\dot{Y}_R + \hat{y}'\,\omega\dot{X}_R$$

$$\vec{\omega}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{x}' & \hat{y}' & \hat{z}' \\ 0 & 0 & \omega \\ X_R & Y_R & 0 \end{vmatrix} = -\hat{x}'\,\omega Y_R + \hat{y}'\,\omega X_R$$

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{x}' & \hat{y}' & \hat{z}' \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega Y_R & \omega X_R & 0 \end{vmatrix} = -\hat{x}'\,\omega^2 X_R - \hat{y}'\,\omega^2 Y_R = -\omega^2\vec{r}$$

Πρόβλημα 1

Ταυτίζουμε την ράβδο με τον άξονα x' που περιστρέφεται με ω.

$$\Rightarrow \quad \vec{V} = \dot{x}_R \hat{x}', \quad \vec{\gamma} = \ddot{x}_R \hat{x}', \quad \vec{r} = x_R \hat{x}'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_x = V\cos\omega t - \omega x_R \sin\omega t \\ u_y = V\sin\omega t + \omega x_R \cos\omega t \end{cases}$$

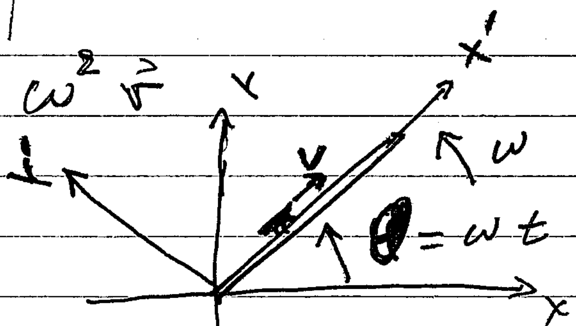
$$a_x = \cancel{\gamma\cos\omega t} - 2\omega V\sin\omega t - \omega^2 x_R \cos\omega t$$

$$a_y = \cancel{\gamma\sin\omega t} + 2\omega V\cos\omega t - \omega^2 x_R \sin\omega t$$

διότι $\gamma = 0$

$$\vec{u} = \vec{V} + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{a} = 2\vec{\omega}\times\vec{V} + \underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{-\omega^2\vec{r}} \cancel{+\vec{\gamma}}$$



$$x_R = Vt$$

$$\hat{x}' = \hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t$$

$$\hat{y}' = -\hat{x}\sin\omega t + \hat{y}\cos\omega t$$

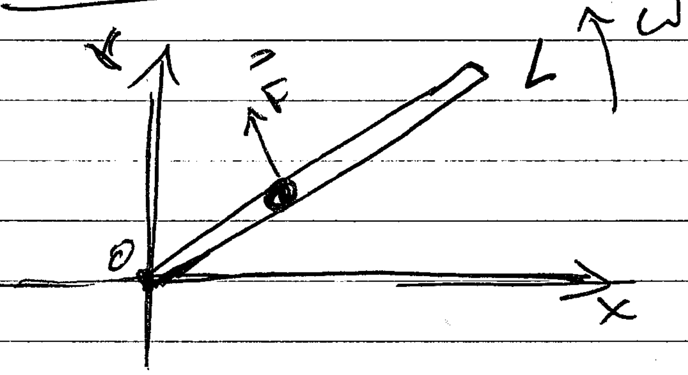
$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} = V\hat{r} + r\omega\hat{\theta} = V\underbrace{\hat{r}}_{\hat{x}'} + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

Πρόβλημα 2

~~Άσκηση "Coriolis" (Εφαρμογή)~~

~~Λεπτή ράβδος μήκους L περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, σε οριζόντιο επίπεδο, γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της. Κατά μήκος της ράβδου κινείται, χωρίς τριβή, σφαιρίδιο μάζας m το οποίο ξεκινά από το σταθερό άκρο της ράβδου με αρχική ταχύτητα υ_0. Πότε φθάνει στο L;~~

Λύση 1:



$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\hat{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega \text{ σταθερή}$$

Η δύναμη $\vec{F}$ είναι κάθετη στην ράβδο, ασκείται από την ράβδο στο σφαιρίδιο, διότι δεν υπάρχει τριβή $\Rightarrow \vec{F} = F\hat{\theta}$

$$\Rightarrow \ddot{r} - \omega^2 r = 0 \quad \text{και} \quad m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\omega) = F$$

$$\Rightarrow \boxed{F = 2m\omega\dot{r}}$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = \omega^2 r \Rightarrow \boxed{r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}}$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=0} = \upsilon_0 \Rightarrow \upsilon_0 = \omega A - \omega B = \omega(A - B)$$

$$\text{και } r(t=0) = 0 \Rightarrow A + B = 0$$

$$\Rightarrow A = -B \Rightarrow v_0 = 2A\omega \Rightarrow \boxed{A = \frac{v_0}{2\omega}}$$

$$\Rightarrow r(t) = \frac{v_0}{2\omega}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right) = \frac{v_0}{\omega}\sinh(\omega t)$$

για $t = t_0$ το σφαιρίδιο φθάνει στο άκρο L της ράβδου $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{v_0}{\omega}\sinh(\omega t_0)}$$

Λύση 2: $m\vec{\gamma} = \vec{F} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$

$$\vec{\omega} = \omega\hat{z}, \quad \vec{r} = r\hat{r}, \quad \vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{r}, \quad \vec{\gamma} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{r}$$

Η ταχύτητα $\vec{v}$ του σφαιριδίου είναι κατά μήκος της ράβδου για τον περιστρεφόμενο παρατηρητή. Το ίδιο και η επιτάχυνση $\vec{\gamma}$.

$$\vec{\omega}\times\vec{v} = \omega\dot{r}\,\hat{z}\times\hat{r} = \; = \omega\dot{r}\,\hat{\theta}$$

$$\vec{F} = F\hat{\theta}, \quad \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = -\omega^2 r\,\hat{r}$$

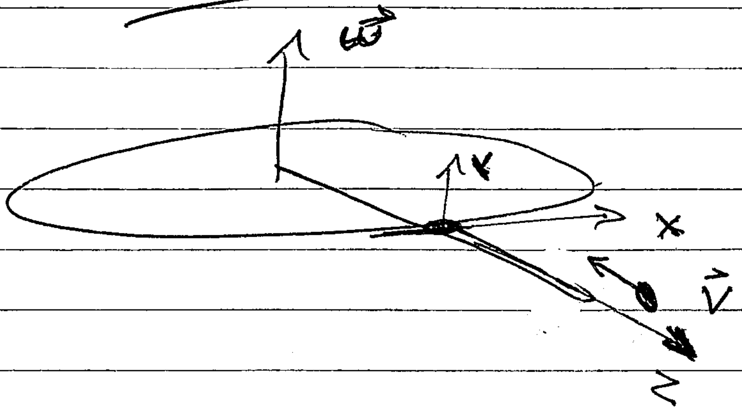
$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{r} = m\omega^2 r \Rightarrow \ddot{r} = \omega^2 r & (1) \\ F - 2m\omega\dot{r} = 0 \Rightarrow F = 2m\omega\dot{r} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

όπως προηγουμένως στην Λύση 1.

$\vec{r}, \vec{v}, \vec{\gamma}$ είναι θέση, ταχύτητα και επιτάχυνση όπως τα βλέπει ο περιστρεφόμενος παρατηρητής.

Πρόβλημα 3



$\vec{V}$ = ταχύτητα του σώματος που πέφτει τοπικά

$\vec{V} = -V\hat{z}$

Επιτάχυνση Coriolis για τον κινούμενο παρατηρητή $= -2\vec{\omega}\times\vec{V} = +2\omega V\,\hat{x}\times\hat{z} = 2\omega V\hat{x}$

$\Rightarrow$ εξίσωση Νεύτωνα για τον κινούμενο παρατηρητή

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega V$$

Προσεγγιστικά η ταχύτητα $V = gt$ διότι το σώμα πέφτει με επιτάχυνση την επιτάχυνση της βαρύτητας g στον ισημερινό (φαινόμενο g)

$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega g t$ με την συνθήκη $\frac{dx}{dt}(t=0)=0$

$x(t=0)=0$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \omega g t^2$ (ολοκλήρωση)

$\Rightarrow$ $\underline{x = \frac{1}{3}\omega g t^3}$ $\Rightarrow x = \frac{1}{3}\omega g\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}$

για ελεύθερη πτώση από ύψος $h = \frac{1}{2}gt^2$

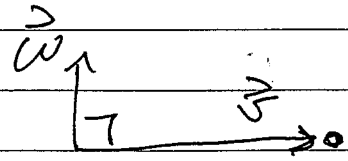
Δεύτερη μεταώσιμο ίδιο θέμα:

$$m\vec{\gamma} = \vec{F} - 2m\,\vec{\omega}\times\vec{v} - m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

Ταυτίζουμε την ακτίνα διεύθυνση με τον άξονα z.

$$\vec{F} = -mg\,\hat{r} \simeq -mg\,\hat{z}$$

$$\vec{r} \simeq (R+z)\hat{z} + x\hat{x} \simeq R\hat{z} + (z\hat{z} + x\hat{x})$$



$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = -\omega^2\vec{r} \simeq -\omega^2(R+\cancel{z})\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \simeq -\omega^2 R\hat{z}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_z\hat{z}$$

$$\vec{\omega}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \omega & 0 \\ v_x & 0 & v_z \end{vmatrix} = \hat{x}\,\omega v_z - \hat{z}\,\omega v_x$$

$$m\frac{dv_z}{dt} = -mg + 2m\omega v_x + m\omega^2 R$$

$$m\frac{dv_x}{dt} = -2m\omega v_z$$

αποσύζευξη των εξισώσεων

ωv_x αμελητέο ως προς το g_φ!!!

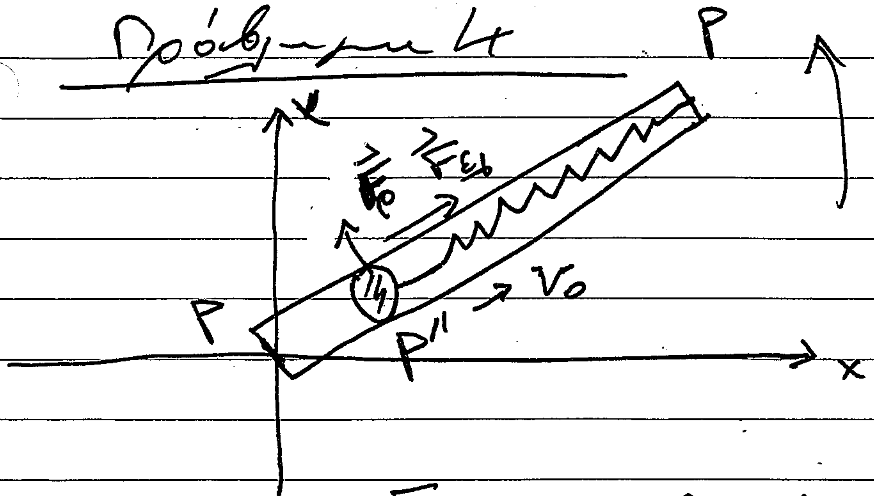
$$\Rightarrow m\frac{dv_z}{dt} = -m(g-\omega^2 R) = -mg_{\varphi}$$ φαινόμενο, $\omega v_x \ll$

$$\Rightarrow \frac{dv_z}{dt} = -g_\varphi \Rightarrow v_z = -g_\varphi t$$

$$\Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = 2\omega g_\varphi t \Rightarrow v_x = \omega g_\varphi t^2$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \omega g_\varphi t^2 \Rightarrow x(t) - x(0) = \frac{1}{3}\omega g_\varphi t^3$$

Πρόβλημα 4



L, ω, M, k

$V_0, \; PP'' = \frac{L}{3}$

(a) $t=0$ $\quad F_{\varepsilon\lambda} = k\Delta \ell = k\left(\frac{2L}{3} - \frac{L}{2}\right) = 200\,Nt$

Αδρανειακός Παρατηρητής

$$F = M\vec{a} = M(r'' - r\omega^2)\hat{r} + 2M\omega \frac{dr}{dt}\hat{\theta}$$

$$V_0 = \frac{dr}{dt} \quad \text{και} \quad \vec{F}_\rho = F_\rho \hat{\theta} = 2M\omega V_0 = 100\,Nt$$

(b) Παρατηρητής περιστρεφόμενος μαζί με την ράβδο.

$$M\vec{\gamma} = \vec{F} - 2M\vec{\omega}\times\vec{v} - M\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\vec{F} = F_{\varepsilon\lambda}\hat{r} + F_\rho \hat{\theta}$$

$$\vec{F}_{coriolis} = -2M\vec{\omega}\times\vec{v} = -2M\omega\frac{dr}{dt}\hat{\omega}\times\hat{r} = -2M\omega\frac{dr}{dt}\hat{\theta}$$

$$\vec{F}_{\varphi\upsilon\gamma o\kappa\varepsilon\nu\tau\rho o\upsilon} = -M\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = M\omega^2 r\hat{r}$$

$t=0$ $\quad F_{\varepsilon\lambda} = 200\,Nt$

$$F_{coriolis} = 2M\omega V_0 = 100\,Nt$$

$$F_{\varphi\upsilon\gamma o\kappa\varepsilon\nu\tau\rho o\upsilon} = \frac{100}{3}\,Nt$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2 r}{dt^2}\hat{r} \Rightarrow F_\rho - 2M\omega\frac{dr}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow F_\rho = 2M\omega V_0 = 100\,N\,t$$

(γ) Δύναμη ακτινική κατά μήκος της ράβδου

$$M\frac{d^2 r}{dt^2} = F_{ελ} + M\omega^2 r$$

$$F_{ελ} + M\omega^2 r_0 = 0 \quad , \quad F_{ελ} = k\left(\frac{L}{2} - r\right)$$

$$k\left(\frac{L}{2} - r_0\right) + M\omega^2 r_0 = 0 \Rightarrow k\frac{L}{2} = (k - M\omega^2) r_0$$

$$r_0 = \frac{k\frac{L}{2}}{k - M\omega^2} = r_{Ισορροπίας}$$

$$r_I = \frac{6}{11}\,m$$

(δ)

$$M r'' = k\left(\frac{L}{2} - r\right) + M\omega^2 r$$

$$M r'' = -(k - M\omega^2) r + \frac{kL}{2}$$

$$M r'' = -(k - M\omega^2) r + (k - M\omega^2) r_0$$

$$M r'' = -(k - M\omega^2)(r - r_0)$$

$$x = r - r_0 \Rightarrow M x'' = -D^2 x$$

$x'' = -\frac{D^2}{M} x = -\omega_0^2 x$ Ταλάντωση

με συχνότητα $\omega_0^2 = \frac{k - M\omega^2}{M} = \frac{k}{M} - \omega^2 > 0$

$$\omega_0^2 = (1200 - 100)\,sec^{-2} = 1100\,sec^{-2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{1100}\,sec^{-1}$$

γύρω από το σημείο r_0.