

# ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

1

## Α) ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ.

1) Ελατήριο σε οριζόντιο επίπεδο.  
υποθέτουμε ότι το ελατήριο έχει αρχικά μήκος μηδέν, ιδανικό ελατήριο.

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{x}$$

Νόμος του Νεύτωνα

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k x$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

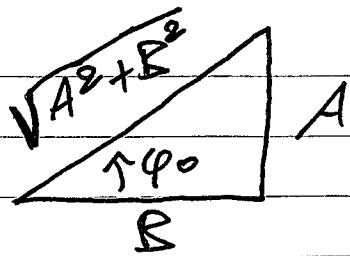
$$\Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Λύση  $x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

Οι συναρτήσεις  $\cos \omega t$  και  $\sin \omega t$  ικανοποιούν, είναι λύσεις, της διαφορικής εξίσωσης. και το άθροισμα των δύο συναρτήσεων ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση.

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t = \sqrt{A^2 + B^2} \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega t \right) = x_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \cos \varphi_0 = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



$$x_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Αρχικές συνθήκες:  $x(0) = x_1$  και  $v(0) = v_1$

Χρησιμοποιώντας τα  $x_1, v_1$  βολονούμε τα  $A, B$  ή  $x_0, \varphi_0$ .

Η ενέργεια διατηρείται, άρα η μηχανική ενέργεια τα διατηρείται:

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{σταθερή} \quad \left\{ \begin{array}{l} E = \frac{1}{2} k x_0^2 \\ E = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 \end{array} \right.$$

Μέση Κινητική και Δυναμική Ενέργεια

Ορίζουμε την μέση χρονική τιμή μιας ποσότητας  $A(t)$

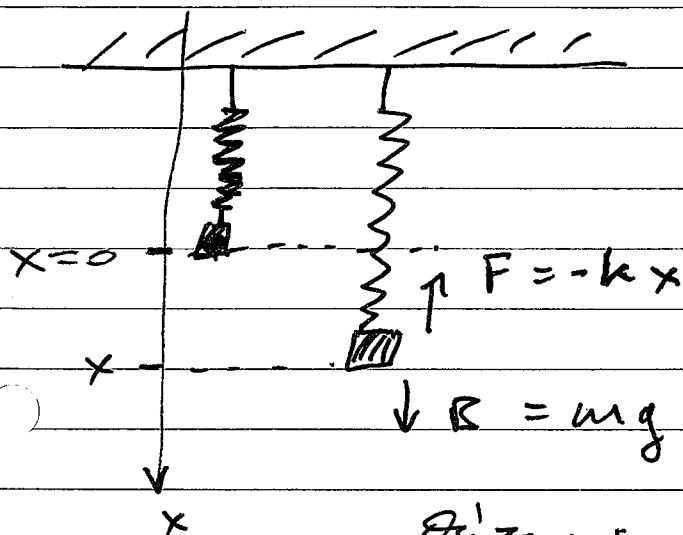
$$\langle A \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt$$

$$\Rightarrow \langle K \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T K(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} m v^2(t) dt = \frac{1}{T} \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi_0) dt = \frac{1}{4} m \omega^2 x_0^2$$

$$\langle U \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} k x_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) dt = \frac{1}{4} m \omega^2 x_0^2$$

$$\Rightarrow \langle K \rangle = \langle U \rangle \quad \text{και} \quad E = \langle E \rangle = \langle K \rangle + \langle U \rangle$$

2) Ελατήριο κατακόρυφα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο.



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + mg$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \left( x - \frac{m}{k} g \right)$$

Θέτουμε  $y = x - \frac{mg}{k}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \text{ και } \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{k}{m} y = -\omega^2 y$$

$$\Rightarrow y(t) = y_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\Rightarrow x(t) = y_0 \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{mg}{k}$$

Τυάρονον με συχνότητα  $\omega$  γύρω από το σημείο

$$x_0 = \frac{mg}{k}$$

Στο σημείο  $x_0$  έχουμε  $kx_0 = mg$   
 άρα το σημείο  $x_0$  είναι το σημείο ισορροπίας του συστήματος όταν η δύναμη των βάρων ισάμεται με την δύναμη του ελατηρίου.

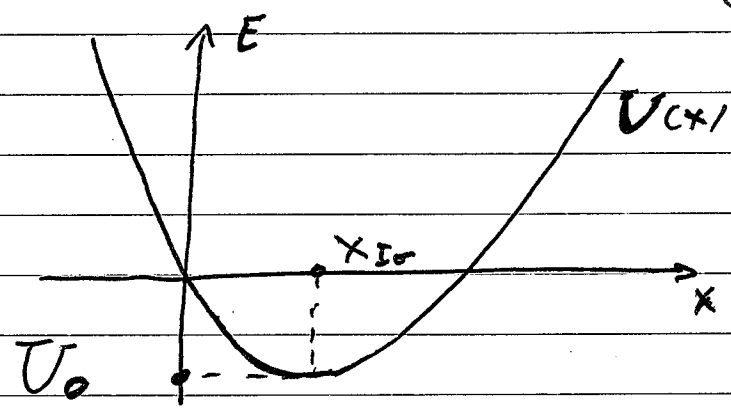
Εξετάζουμε το σύστημα ενεργειακά:

$$U(x_1) - U(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} F_1 dx = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) dx + \int_{x_1}^{x_2} mg dx$$

$$U(x_1) - U(x_2) = \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_2^2 + mg(x_2 - x_1)$$

Ορίζουμε  $U(x=0) = 0$

$$\Rightarrow U(x) = \frac{1}{2} kx^2 - mgx$$



$$\frac{dU}{dx} = 0$$

για  $x = x_{10}$

$$\frac{dU}{dx} = kx - mg$$

$$x_{10} = \frac{mg}{k}$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = k > 0 \Rightarrow \text{Ευνοηδής Ισορροπία}$$

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2 - mgx = \frac{1}{2} kx^2 - kx_{10}x + \frac{1}{2} kx_{10}^2$$

$$U(x) = \frac{1}{2} k(x - x_{10})^2 + U_0, \quad U_0 = -\frac{1}{2} kx_{10}^2$$

$$\Rightarrow \text{Εξίσωση κίνησης} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x) = -\frac{dU}{dx} = -k(x - x_{10})$$

$$\text{Παρατηρούμε συχνότητα} \quad \omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{1}{m} \frac{d^2U}{dx^2}$$

γύρω από την θέση ισορροπίας  $x_{10}$ .

5) Κίνηση ελαστικού νηθιά σε μία  
θέρη Ερωσθδής Ισορροπίας. 5

Το σύστημα περιγράφεται από μία  
συνάρτηση δυναμικής ενέργειας  $U(x)$

$$F = - \frac{dU}{dx}$$

Εν έχουμε ένα σημείο  $x_{I0}$  Ερωσθδής  
Ισορροπίας (ελάχιστο της δυναμικής  
Ενέργειας)

$$\frac{dU}{dx}(x=x_{I0}) = 0, \quad \frac{d^2U}{dx^2}(x_{I0}) > 0$$

Αναπτύσσουμε την δυναμική ενέργεια σε σειρά  
Τaylor γύρω από το σημείο  $x_{I0}$

$$U(x) = U(x_{I0}) + \frac{dU(x_{I0})}{dx}(x-x_{I0}) + \frac{1}{2} \frac{d^2U(x_{I0})}{dx^2}(x-x_{I0})^2 + \dots$$

για  $|x-x_{I0}| \ll 1$  κρατάμε μόνο τον πρώτο  
μην μόνον το όρο.

$$\Rightarrow U(x) = U(x_{I0}) + \frac{1}{2} \frac{d^2U(x_{I0})}{dx^2}(x-x_{I0})^2$$

$$\text{ορίζουμε } k = U''(x_{I0}) = \frac{d^2U}{dx^2}(x_{I0}) > 0$$

$$\Rightarrow U(x) = U(x_{I0}) + \frac{1}{2} k (x-x_{I0})^2$$

Νόμος του Νεύτωνα:  $F = - \frac{dU}{dx}$

$$F = -k(x-x_{I0}) \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x-x_{I0})$$

⇒ Ταλαντώσεων γύρω από την θέση ισορροπίας χτισ με συχνότητα

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{1}{m} U''(x_{ισ})$$

Εφαρμογή:

Κεντρικός Αναγωγικός Δίνεσαι από την σχέση:

$$U = -\frac{a}{r^n} + \frac{b}{r^3} \quad a, b > 0$$

(i) Βρείτε για ποιές τιμές του n έχουμε ισορροπία.

(ii) Για ποιές τιμές του n η ισορροπία αυτή είναι ευσταθής?

(iii) Βρείτε τον τρόπο της ταλάντωσης να εκτελεί ένα σώμα μάζας m που βρίσκεται ακριβώς στο σημείο της ευσταθούς ισορροπίας.

$$(i) \frac{dU}{dr} = \frac{na}{r^{n+1}} - \frac{2b}{r^3}$$

Ισορροπία ⇒ ανυψώτατο ⇒ πρώτη παράγωγος = μηδέν

$$\Rightarrow \left. \frac{dU}{dr} \right|_{r=r_0} = 0 \Rightarrow \frac{na}{r_0^{n+1}} = \frac{2b}{r_0^3} \Rightarrow r_0^{n-2} = \frac{na}{2b}$$

(ii) Ευσταθής ισορροπία ⇒ ελάχιστο ⇒  $\frac{d^2U}{dr^2} > 0$

$$\frac{d^2U}{dr^2} = -\frac{(n+1)a}{r^{n+2}} + \frac{6b}{r^4} = \frac{1}{r^4} \left( 6b - \frac{n(n+1)a}{r^{n-2}} \right)$$

$$U''(r_0) = \frac{1}{r_0^4} \left( 6b - \frac{n(n+1)a}{r_0^{n-2}} \right) = \frac{1}{r_0^4} (6b - 2 \cdot \frac{na}{2})$$

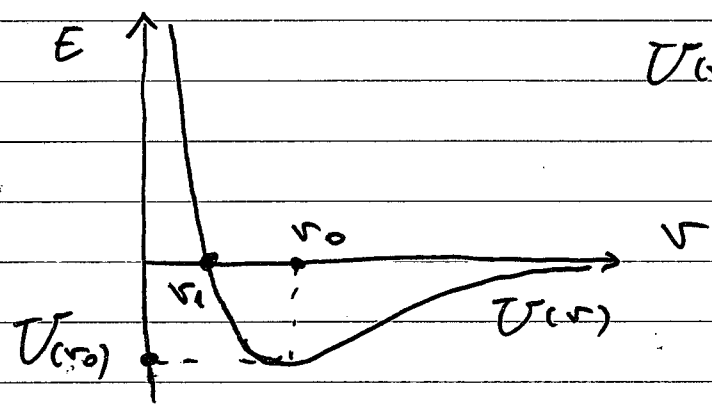
$$U''(r_0) = \frac{2b}{r_0^4} (3 - (n+1)) > 0 \Rightarrow \underline{2 > n}$$

(iii) η περίοδος ταυτίζεται με την περίοδο απλού αρμονικού ελαστικού > λογαριασμός

$$U''(r_0) = \frac{2b(2-n)}{r_0^4} = k > 0 \text{ για } \underline{n < 2}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

και  $r_0^{n-2} = \frac{na}{2b}$ ,  $U(r_0) = -\frac{b}{r_0^2} \left(\frac{2}{n} - 1\right) < 0$



$$U(r_1) = 0 \quad r_1^{2-n} = \frac{b}{a}$$

$$r_0^{2-n} = \frac{2b}{na} > r_1^{2-n} = \frac{b}{a}$$

διότι  $\frac{2}{n} > 1$

Για να ενδυναμώσουμε επίθετον ως εξής

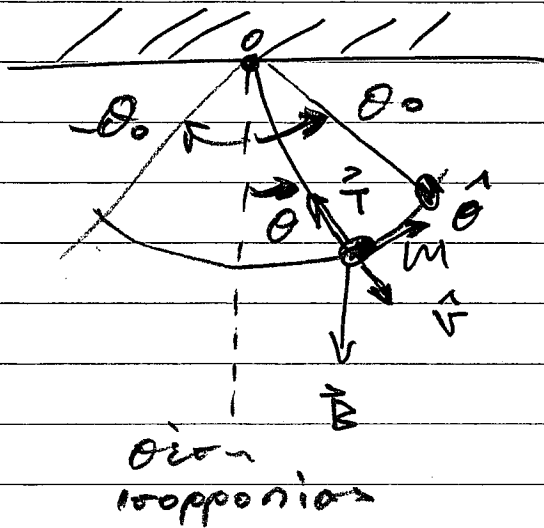
$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \text{ όταν έχουμε την δυναμική ενέργεια } U(\vec{r})$$

Όταν η δυναμική ενέργεια εξαρτάται μόνο από το  $r = |\vec{r}|$  τότε

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dr} \hat{r} \text{ ακτινική.}$$

# (4) Απλό Ελαστικό

(8)



$$\vec{B} + \vec{T} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \vec{a}$$

Χρησιμοποιούμε ως γινόμενα συντεταγμένες  $(r, \theta)$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = l \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta}$$

$l = \mu \nu \mu \nu \nu \mu \mu \mu \mu$

$m = \mu \mu \mu \mu \mu \mu \mu \mu \mu \mu$

Το νήμα είναι αβέβαιο και μη εκτετατό.

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = l \frac{d^2 \theta}{dt^2} \hat{\theta} - l \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \hat{r}$$

$$\vec{T} = -T \hat{r}, \quad \vec{B} = -Mg \sin \theta \hat{\theta} + Mg \cos \theta \hat{r}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -m l \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -T + mg \cos \theta \\ m l \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \end{cases}$$

Χρησιμοποιούμε την δεύτερη εξίσωση για να προσδιορίσουμε την κίνηση:

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta = -\omega_0^2 \sin \theta$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Μέγιστη γωνία απόκλισης από την κατακόρυφο (θέση ισορροπίας) είναι η  $\theta_0$ .

Το σώμα κάνει ταλαντώση - περιοδική κίνηση από τη γωνία  $\theta_0 \rightarrow -\theta_0$ .



Ανάπτυξη των συναρτήσεων  $\sin \theta$  γύρω από των θέση ισορροπίας  $\theta = 0$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots$$

Εάν  $\theta_0 \approx 0.1$  σε ακτίνια διαστάσεις  $\approx 6^\circ$  μπορούμε να κρατήσουμε μόνο τον πρώτο όρο και να αγνοήσουμε των επίδραση των όρων  $\theta^3, \theta^5, \dots$  στην κίνηση

$$\Rightarrow \theta'' = -\omega_0^2 \theta \Rightarrow \text{Αρχή Απομονωτή Ταλαντώσεων}$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Περίοδος ταλαντώσεων:  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Εξίσωση κίνησης από την Ευρονομία:

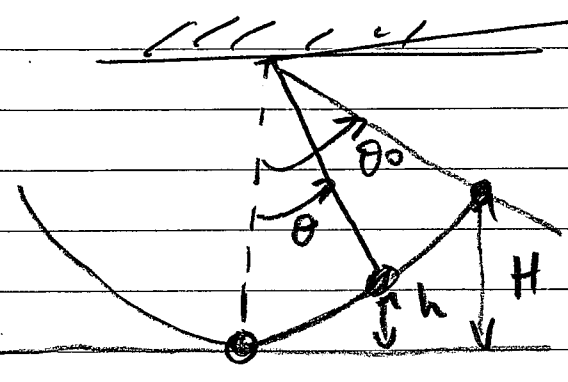
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

$$\begin{cases} \vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v} = ml^2 \frac{d\theta}{dt} \hat{r} \times \hat{\theta} = ml^2 \frac{d\theta}{dt} \hat{z} \\ \vec{N} = \vec{r} \times \vec{B} = -lmg \sin \theta \hat{z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -lmg \sin \theta$$

$$\Rightarrow \theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

Υπολογισμός της περιόδου ταλαντώσεως  
 T για μικρά γωνία απόψεις θ<sub>0</sub>.



$$E = K + U$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$U = mgh = mgl(1 - \cos\theta)$$

η Ενέργεια διατηρείται = E(H) = mgl(1 - cosθ<sub>0</sub>)

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m l^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgl(1 - \cos\theta) = mgl(1 - \cos\theta_0)$$

$$\Rightarrow \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{l} (\cos\theta - \cos\theta_0) = \frac{4g}{l} \left( \sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = 2 \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{T}{4}} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

Ελλειρική  
 ολοκλήρωση  
 πρώτου  
 είδους

Από την ταυτότητα  $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 u$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{T}{4} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}, \quad k^2 = \sin^2 \frac{\theta_0}{2}$$

Πρώτες ελλειρική ολοκλήρωση πρώτου είδους

Για υπολογισμούς τα ολοκλήρωμα με ανάπτυξη  
 σε σειρά της συνάρτησης  $(1 - k^2 \sin^2 u)^{-\frac{1}{2}}$

$$(1 - k^2 \sin^2 u)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 u + \frac{3}{8} k^4 \sin^4 u + \dots$$

$$\sqrt{\frac{g}{e}} \frac{T}{4} = \frac{D}{2} + \frac{k^2}{2} \int_0^{\frac{D}{2}} \sin^2 u \, du + \frac{3k^4}{8} \int_0^{\frac{D}{2}} \sin^4 u \, du + \dots$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{e}{g}} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right)$$

---


$$\int_0^{\frac{D}{2}} \sin^2 u \, du = \frac{D}{4}$$

$$d(\sin \frac{\theta}{2}) = \sin \frac{\theta_0}{2} d(\sin u) \Rightarrow d \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \frac{\theta_0}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \cos u \, du$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 u}$$


---

# Β ΦΘΩΝΣΑ ΚΑΙ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΟΣΗ

① Λύση της απλής αρμονικής ταλάντωσης  
 $X'' = -\omega^2 X$  πραγματική αρχική συνθήκη  
δίνεται με συνθήκη σύγκρισης

δοκιμάζουμε συνάρτηση του  $X = e^{\rho t}$

$$X'' = \rho^2 e^{\rho t} \Rightarrow \rho^2 = -\omega^2$$

$$\rho = \pm i\omega$$

$$X = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Γενική Λύση} \\ \text{της διαφορικής} \end{array} \right.$$
  
$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

$X = \text{πραγματικός αριθμός} \Rightarrow C_2 = C_1^*$

$$X = (C_1 + C_1^*) \cos \omega t + i(C_1 - C_1^*) \sin \omega t$$

$$A = C_1 + C_1^* \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad B = i(C_1 - C_1^*) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow X = A \cos \omega t + B \sin \omega t = X_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

② Φθίνουσα ταλάντωση,  
δίνουμε τρεις αντίστοιχες ταχύτητες.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow m x'' + b x' + kx = 0$$

$$x = e^{\rho t} \Rightarrow m \rho^2 + b \rho + k = 0$$

Δίνουμε το πρώτο

$$p_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{b^2 - 4mk}$$

$$p_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

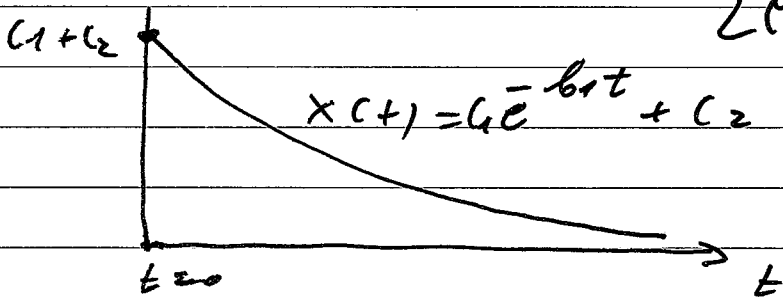
$$p_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}$$

formülün:  $x = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}$

Ayrık Durum

(i)  $b^2 - 4mk > 0$   
uzun süre için çözümler

$$\Rightarrow p_{1,2} \in \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} p_1 = -\frac{b}{2m} - \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} < 0 \\ p_2 = -\frac{b}{2m} + \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} < 0 \end{cases}$$



$$p_1 = -b_1, \quad p_2 = -b_2$$

ayrık durumdaki çözümler

(ii)  $b^2 - 4mk < 0$  > kısa süre için çözümler

$$p_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{-(4mk - b^2)}$$

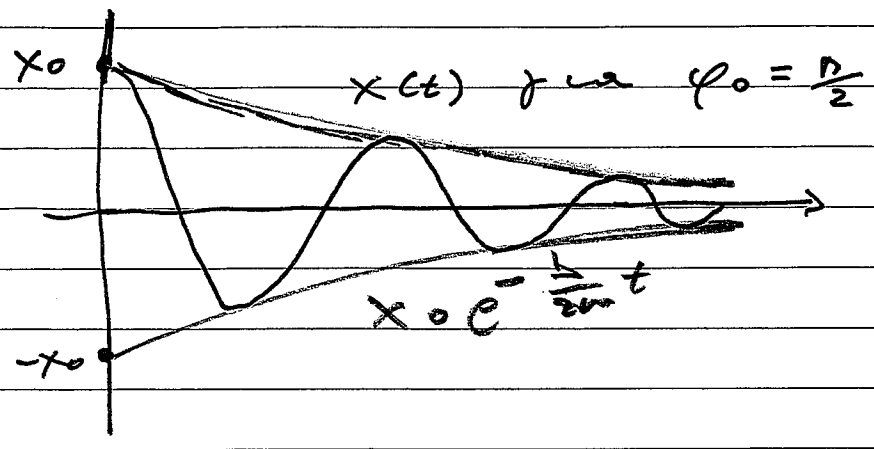
$$p_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm i \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = -\frac{b}{2m} \pm i \tilde{\omega}$$

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{-\frac{b}{2m} t} e^{i \tilde{\omega} t} + c_2 e^{-\frac{b}{2m} t} e^{-i \tilde{\omega} t}$$

$$c_2^* = c_1$$

$\Rightarrow X(t) = X_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \sin(\tilde{\omega}t + \varphi_0)$



3) Εξαναγκασμένη Ταλάντωση

$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F(t)$

$F(t) = \text{απεριόδωτο δόνηση} = F_0 \sin(\omega t)$

Η λύση  $X(t)$  είναι άθροισμα της λύσης της ομογενούς εξίσωσης χωρίς τον εξωτερικό δόνηση και μια μερική λύση της εξίσωσης με τον εξωτερικό δόνηση  $F(t)$

$X(t) = X_{\text{ομγ}} + X_{\text{εξ}}$

$X_{\text{ομγ}}(t) = X_{\text{φθιν.}}(t) = C e^{-\frac{b}{2m}t} \sin(\tilde{\omega}t + \varphi_0)$

Χρονιά  $t \rightarrow \infty \rightarrow 0$  και παραμένει μόνο η λύση που υπαίχεται στον εξωτερικό δόνηση

$x_{\text{osc}}(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$

$\Rightarrow x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$  για  $t \Rightarrow t_0 = \frac{2\pi}{\omega}$

αντικαθιστούμε την  $x(t)$  και τις παραγώγους στην διαφορική εξίσωση και υπολογίζουμε τους συντελεστές  $A, B$

$x'(t) = \omega A \cos \omega t - \omega B \sin \omega t$

$x''(t) = -\omega^2 A \sin \omega t - \omega^2 B \cos \omega t$

$\rightarrow [-m\omega^2 A - \omega b B + kA] \sin \omega t + [-m\omega^2 B + \omega b A + kB] \cos \omega t = F_0 \sin \omega t$

$\Rightarrow \begin{cases} -m\omega^2 A - \omega b B + kA = F_0 \\ -m\omega^2 B + \omega b A + kB = 0 \end{cases}$

από την δεύτερη εξίσωση έχουμε:  $A = \frac{-k + m\omega^2}{\omega b} B$

$\rightarrow A = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\frac{b}{m} \omega} B$  όπου  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

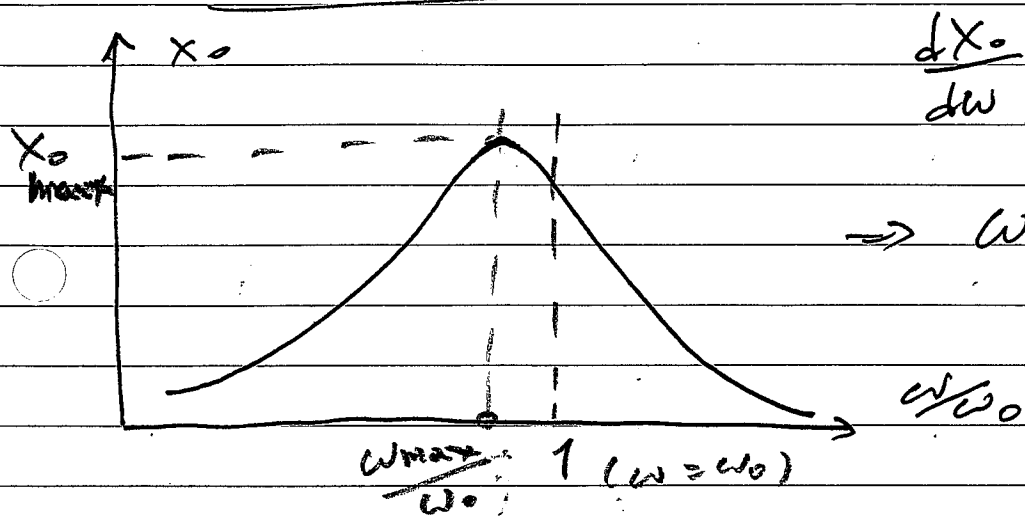
και από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε:

$B = - \frac{F_0/m \frac{b}{m} \omega}{(\frac{b}{m})^2 \omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \Rightarrow A = \frac{F_0/m (\omega^2 - \omega_0^2)}{(\frac{b}{m})^2 \omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}$

$x = x_0 \sin(\omega t + \tilde{\varphi})$  όπου  $x_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$

$$X_0 = \frac{F_0/m}{\left[ \left(\frac{b}{m}\right)^2 \omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2 \right]^{1/2}}$$

$$\tan \tilde{\varphi} = \frac{B}{A} = \left( \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\frac{b}{m} \omega} \right)^{-1} = \frac{\frac{b}{m} \omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$



$$\left. \frac{dX_0}{d\omega} \right|_{\omega = \omega_{max}} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_{max}^2 = \omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}$$

$$X_{0,max} = \frac{F_0}{b} \frac{1}{\left( \omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2} \right)^{1/2}}$$

$$b \rightarrow 0 \Rightarrow X_{0,max} \rightarrow \infty, \quad \tilde{\varphi} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

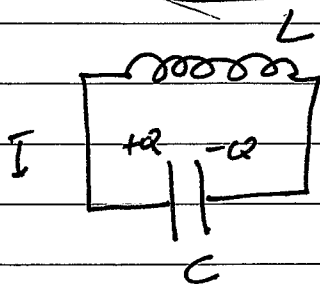
$\left\{ \begin{array}{l} \text{Συναρμογή για } \omega \rightarrow \omega_{max} \\ X_0 = \text{πρjκτο} \end{array} \right.$



(4) Ηλεκτρικά Κυκλώματα  
R, L, C

17

(i) Κύκλωμα L, C



$$V_L + V_C = 0$$

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

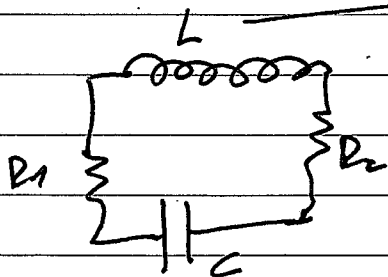
$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow Q'' = -\frac{1}{LC} Q$$

$$Q = Q_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

(ii) Κύκλωμα R, L, C  
σε σειρά



$$V_L + V_R + V_C = 0$$

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0$$

$$R = R_1 + R_2 \Rightarrow I = \frac{dQ}{dt}$$

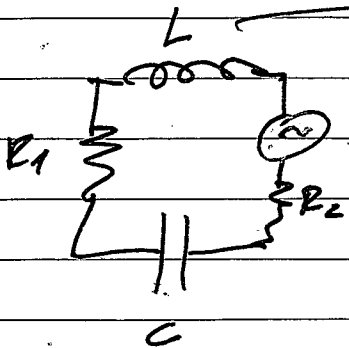
$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

Φθίνουσα ταρσοειδής

$$Q = Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\tilde{\omega}t + \phi_0)$$

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

(iii) κύκλωμα R, L, C  
με εναλλασσόμενη τάση  $V(t) = V_0 \sin \omega t$



$V_L + V_R + V_C = V(t)$   
 $L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = V_0 \sin \omega t$   
 $R = R_1 + R_2 \Rightarrow I = \frac{dQ}{dt}$

$LQ'' + RQ' + \frac{Q}{C} = V_0 \sin \omega t$

$Q = Q_0 \sin(\omega t + \varphi)$

$Q_0 = \frac{V_0/L}{\left[ \left(\frac{R}{L}\right)^2 \omega^2 + \left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right)^2 \right]^{1/2}}$

συχνότητα μέγιστο  $Q_0$   
 $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}$

$I = \frac{dQ}{dt} = \omega Q_0 \cos(\omega t + \tilde{\varphi})$

$I_0 = \omega Q_0 = \frac{V_0 \omega}{\left[ \dots \right]^{1/2}}$

$\Rightarrow V_0 = I_0 \frac{L}{\omega} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\omega\right)^2 + \left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right)^2}$

$V_0 = I_0 \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = Z_1 I_0$

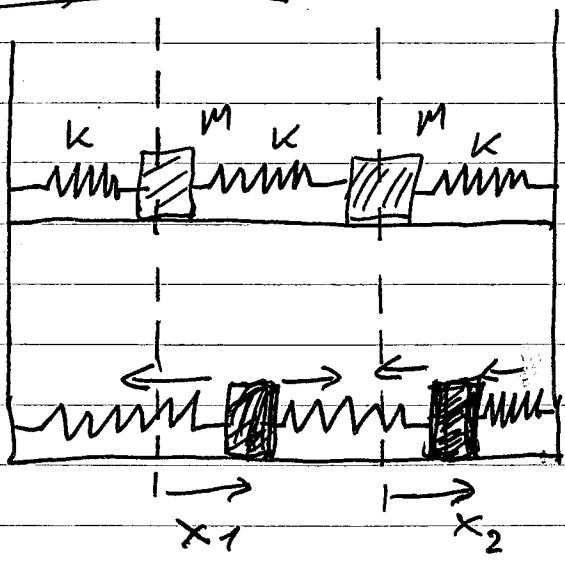
$\omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow$  μέγιστο  $I_0$ .

# Γ) Εφαρμογή για την σύνδεση ταλαντώσεων (Διακρούμε)

Δύο μάζες  $M_1 = M_2 = M$  ολισθαίνουν χωρίς τριβή σε οριζόντιο επίπεδο, υπό την επίδραση τριών ελατηρίων με  $k_1 = k_2 = k_3 = k$ .

- α) Υποθέστε ότι για  $t=0$  οι μάζες βρίσκονται στις θέσεις ισορροπίας τους και  $v_1 = -v_2$ . Βρείτε την θέση της κάθε μάζας συνάρτηση του χρόνου και την συχνότητα της ταλάντωσης.
- β)  $v_1 = v_2$  για  $t=0$  (παρόμοια ερωτήματα).
- γ)  $v_1 = 0, v_2 = 0, x_1 = a, x_2 = 0$  για  $t=0$  (παρόμοια ερωτήματα).

## Έχουμε



## Εξισώσεις κίνησης

$$M \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$M \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -kx_2 - k(x_2 - x_1)$$

Αφαιρούμε:  $M \frac{d^2}{dt^2} (x_1 + x_2) = -k(x_1 + x_2)$

Αφαιρούμε:  $M \frac{d^2}{dt^2} (x_1 - x_2) = -3k(x_1 - x_2)$

Ορίζουμε τις νέες μεταβλητές:

$$A = x_1 + x_2, \quad B = x_1 - x_2$$

με εξίσωση κίνησης:

$$m \frac{d^2 A}{dt^2} = -kA \quad \Rightarrow \quad \omega_A^2 = \frac{k}{m}$$

$$m \frac{d^2 B}{dt^2} = -3kB \quad \Rightarrow \quad \omega_B^2 = \frac{3k}{m}$$

Λύση των διαφορικών εξισώσεων:

$$A(t) = A_1 \cos \omega_A t + A_2 \sin \omega_A t$$

$$B(t) = B_1 \cos \omega_B t + B_2 \sin \omega_B t$$

Γυρνάμε πίσω στα  $x_1, x_2$ :

$$x_1(t) = \frac{A(t) + B(t)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} [A_1 \cos \omega_A t + B_1 \cos \omega_B t + A_2 \sin \omega_A t + B_2 \sin \omega_B t]$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2} (A(t) - B(t)) =$$

$$= \frac{1}{2} [A_1 \cos \omega_A t - B_1 \cos \omega_B t + A_2 \sin \omega_A t - B_2 \sin \omega_B t]$$

Ανάπτυξη των περιπτώσεων (α) με

$$x_1(t=0) = 0, \quad x_2(t=0) = 0, \quad v_1(t=0) = -v_2(t=0)$$

(21)

$$x_1(0) = 0 \Rightarrow A_2 + B_2 = 0$$

$$x_2(0) = 0 \Rightarrow A_2 - B_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_2 = 0 \\ B_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{A_1}{2} \cos \omega_A t + \frac{B_1}{2} \cos \omega_B t \\ x_2(t) = \frac{A_1}{2} \cos \omega_A t - \frac{B_1}{2} \cos \omega_B t \end{cases}$$

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \omega_A \frac{A_1}{2} \sin \omega_A t + \omega_B \frac{B_1}{2} \sin \omega_B t$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = \omega_A \frac{A_1}{2} \sin \omega_A t - \omega_B \frac{B_1}{2} \sin \omega_B t$$

$$v_1(0) = -v_2(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_A \frac{A_1}{2} + \omega_B \frac{B_1}{2} = -\omega_A \frac{A_1}{2} + \omega_B \frac{B_1}{2}$$

$$\Rightarrow \omega_A A_1 = 0 \Rightarrow A_1 = 0 \text{ since } \omega_A \neq 0$$

$$\Rightarrow x_1(t) = \frac{B_1}{2} \cos \omega_B t$$

$$x_2(t) = -\frac{B_1}{2} \cos \omega_B t$$

Σημειώνω το σύστημα ταλαντεύεται με  $x_1(t) = -x_2(t)$

και με συχνότητα  $\omega_B$ .

Όμοια αναζητάμε στην περίπτωση (β) όπου βλέπουμε  $x_1(t) = \frac{A_1}{2} \cos \omega_A t$

$$x_2(t) = \frac{A_2}{2} \cos \omega_A t$$

Ανάγκη συν διαίρεση (f)

με  $U_1(0) = 0, U_2(0) = 0, X_1(0) = a, X_2(0) = 0$

$X_2(0) = 0 \Rightarrow A_2 = B_2$

$$\left. \begin{aligned} U_1(0) = 0 &\Rightarrow \omega_A A_1 + \omega_B B_1 = 0 \\ U_2(0) = 0 &\Rightarrow \omega_A A_1 - \omega_B B_1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A_1 &= 0 \\ B_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1(t) = \frac{A_2}{2} (\cos \omega_A t + \cos \omega_B t) \\ X_2(t) = \frac{A_2}{2} (\cos \omega_A t - \cos \omega_B t) \end{cases}$$

$X_1(0) = a = 2 \frac{A_2}{2} = A_2 \Rightarrow A_2 = a$

$\cos \omega_A t + \cos \omega_B t = 2 \cos \frac{\omega_B - \omega_A}{2} t \cos \frac{\omega_B + \omega_A}{2} t$

$\cos \omega_A t - \cos \omega_B t = 2 \sin \frac{\omega_B - \omega_A}{2} t \sin \frac{\omega_B + \omega_A}{2} t$

$\Rightarrow X_1(t) = \left[ a \cos \left( \frac{\omega_B - \omega_A}{2} t \right) \right] \cdot \cos \left( \frac{\omega_B + \omega_A}{2} t \right)$

$X_2(t) = \left[ a \sin \left( \frac{\omega_B - \omega_A}{2} t \right) \right] \cdot \sin \left( \frac{\omega_B + \omega_A}{2} t \right)$

