Δ Νόμοι του Kepler
Κίνηση Πλανητών

Η εξίσωση κίνησης είναι:

$$M\vec{a} = \frac{c}{r^2}\hat{r} \qquad (1)$$

όπου $c = -GMM_2$ για το πεδίο βαρύτητας και M_2 η μάζα του Ηλίου.

Επειδή η δύναμη είναι κεντρική η στροφορμή διατηρείται, άρα η κίνηση γίνεται σε ένα επίπεδο κάθετο στο διάνυσμα της στροφορμής.

Οι πολικές συντεταγμένες (r,θ) σε αυτό το επίπεδο που ορίζεται από την ταχύτητα $\vec{v}$ της μάζας M και το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ ορίζουν πλήρως το σύστημα.

Θέτουμε $\frac{dr}{dt} = \dot{r}$, $\frac{d^2r}{dt^2} = \ddot{r}$ και $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες είναι:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\hat{\theta} \qquad (2)$$

από την (1) αντικαθιστώντας την (2) έχουμε

$$M(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \frac{c}{r^2} \qquad (3)$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow r^2\dot{\theta} = \text{σταθερά στον χρόνο} \qquad (4)$$

Στροφορμή $\vec{L} = M\vec{r}\times\vec{v} = Mr^2\frac{d\theta}{dt}\hat{z}$

$\vec{L}$ = σταθερό διάνυσμα στον χρόνο $= L\hat{z}$

$L = Mr^2\dot{\theta}$ = σταθερή $\Rightarrow r^2\dot{\theta} = \frac{L}{M}$ (5)

η εξίσωση (3) γίνεται $\boxed{\ddot{r} - \frac{L^2}{M^2r^3} = \frac{C}{Mr^2}}$ (6)

Λύνουμε ως προς την συνάρτηση $W = \frac{1}{r(\theta)}$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta}$$

$$\frac{dW}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2W}{d\theta^2} + W = -\frac{CM}{L^2}} \Rightarrow \boxed{W = A\cos\theta - \frac{CM}{L^2}}$$ (7)

$$\Downarrow$$

προσδιορίζουμε το A ως συνάρτηση της Ενέργειας $\boxed{\frac{1}{r} = -\frac{CM}{L^2} + A\cos\theta}$

$$E = \frac{1}{2}M\vec{v}^2 + \frac{C}{r} = \frac{1}{2}M(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{C}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}M\dot{\theta}^2\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] + \frac{C}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}M\frac{L^2}{M^2r^4}\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] + \frac{C}{r}$$

αντικαθιστώντας από την (7) τον r και το $\frac{dr}{d\theta}$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{CM}{L^2}\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{C^2M}}}$$ (8)

ορίζουμε $\boxed{\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{C^2 M}}}$ εκκεντρότητα

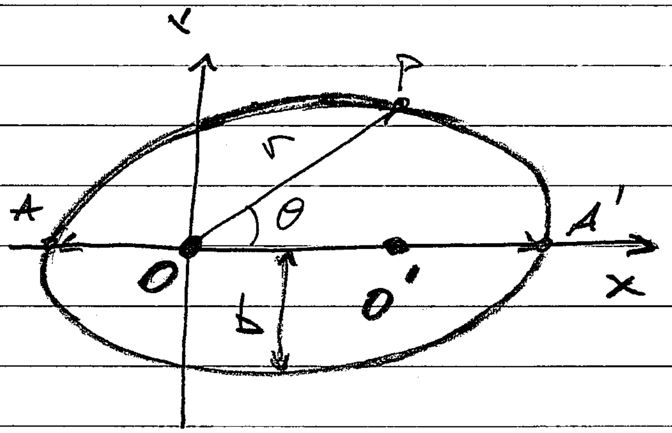
$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{s}\left(1 - \varepsilon\cos\theta\right)} \quad (9) \quad \boxed{\frac{1}{s} = \frac{-CM}{L^2} > 0 \quad C < 0}$$

Η εξίσωση (9) περιγράφει μια κωνική τομή

(i) κύκλος $\varepsilon = 0 \Rightarrow r = \text{σταθερό} = r_0$

$$x^2 + y^2 = r_0^2$$

(ii) έλλειψη $0 < \varepsilon < 1$ Η μία εστία της έλλειψης, δηλαδή ο Ήλιος, στην αρχή των συντεταγμένων



$$\boxed{r = \frac{s}{1 - \varepsilon\cos\theta} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 - \varepsilon\cos\theta}}$$

μεγάλος ημιάξονας $\frac{AA'}{2} = a$

$AA' = 2a$

$OP + O'P = \text{σταθερά} = 2a$

μικρος ημιάξονας $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$

εμβαδόν έλλειψης $= \pi a b$

$\theta = 0 \rightarrow OA' = a(1+\varepsilon)$

$\theta = \pi \rightarrow OA = a(1-\varepsilon)$

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}, \quad \boxed{x_0 = \varepsilon a = \sqrt{a^2 - b^2}}$$

$1+\varepsilon > |1 - \varepsilon\cos\theta| > 0$, $r = \text{πεπερασμένο}$

$r_{max} = a(1+\varepsilon) = OA'$

$r_{min} = a(1-\varepsilon) = OA$ $\Big\} \; \frac{dr}{d\theta} = 0$

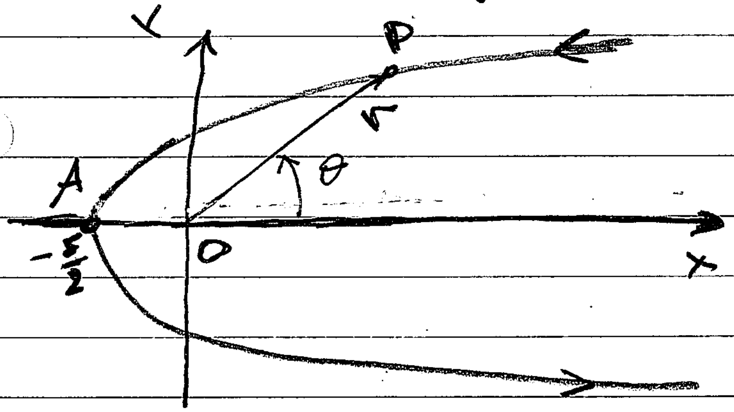
(iii) Παραβολή, $\varepsilon = 1$

$$r = \frac{s}{1-\cos\theta}$$

ο Ήλιος, εστία της κωνικής τομής, στην αρχή των συντεταγμένων

$r_{min} = \frac{s}{2}$ για $\theta = \pi$

$r_{max} = \infty$ για $\theta = 0$ $(\theta = 0^+, \theta = 0^-)$



$OA = r_{min} = \frac{s}{2}$

$y^2 = 2s\left(x + \frac{s}{2}\right)$

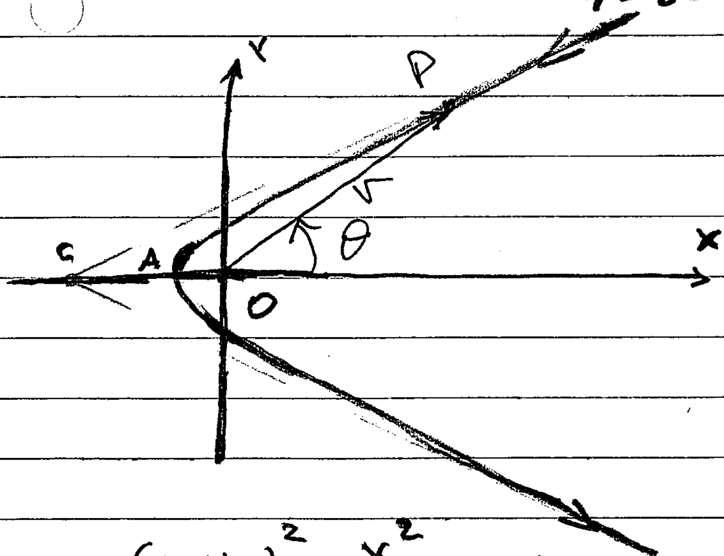
(iv) Υπερβολή, $\varepsilon > 1$

$$r = \frac{s}{1-\varepsilon\cos\theta}$$

$r \geq 0$

$\frac{dr}{d\theta} = 0$ $\theta = \cancel{0}, \pi$

$\theta = \pi \Rightarrow OA = \frac{s}{1+\varepsilon}$



$r \to \infty$ για $\cos\theta_1 = \frac{1}{\varepsilon}$

δύο τιμές $\theta_2 = -\theta_1$

δύο ασυμπτωτικές [illegible] $\pm\theta_1$

$\theta_1 < \theta < \pi$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

όπου ορίζουμε:

$s = a(\varepsilon^2 - 1)$, $x_0 = -\varepsilon a$

καρτεσιανές συντεταγμένες $b^2 = a^2(\varepsilon^2 - 1)$

<u>Σχέση μεταξύ Εκκεντρότητας και Ενέργειας:</u>

$$E = \frac{1}{2} M \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} M r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{C}{r}$$

$$E = \frac{1}{2} M \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left[\frac{1}{2} \frac{L^2}{M r^2} + \frac{C}{r}\right] = V_{\varepsilon\nu}(r)$$

$$E = \frac{1}{2} M \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + V_{\varepsilon\nu}(r) = \frac{1}{2} M \left(\frac{L^2}{M^2 r^4}\right)\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + V_{\varepsilon\nu}(r)$$

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{C^2 M}}} \quad , \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{s}(1 - \varepsilon\cos\theta)$$

E = ολική ενέργεια = κινητική και δυναμική ενέργεια

(i) για το ενεργό δυναμικό $V_{\varepsilon\nu}(r)$ μπορούμε να ανατρέξουμε στο σχήμα της περίπτωσης <u>Γ,6</u> όπου $C = -GM_K M$, βαρύτητα.

(ii) στην κίνηση του σώματος μάζας M που περιγράφεται από το $V_{\varepsilon\nu}(r)$ η στροφορμή παραμένει σταθερή, ακόμη και όταν το σώμα μπορεί να κινηθεί μέχρι το άπειρο.

(iii) όταν το <u>$C > 0$</u>, περίπτωση <u>Γ,2</u>, σκέδαση φορτίου από ομόσημο φορτίο με απωστική δύναμη η κίνηση είναι πάντα υπερβολή διότι <u>$E > 0 \Rightarrow \varepsilon > 1$</u>.

(iv) <u>$\varepsilon = 0$</u> $\Rightarrow$ <u>$E < 0$</u> και $\frac{2EL^2}{C^2 M} + 1 = 0$

$$\Rightarrow E = -\frac{C^2 M}{2L^2} \quad , \quad \underline{C = -GM_K M}$$

$L = Mv r$ για την κυκλική κίνηση

$$E = \frac{1}{2} M v^2 - \frac{G M_K M}{r}$$

για την κυκλική κίνηση δύναμη βαρύτητας
= κεντρομόλος επιτάχυνση

$$\Rightarrow \frac{G M_K M}{r^2} = M \frac{v^2}{r} \Rightarrow M v^2 = \frac{G M_K M}{r}$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{G M_K M}{r} - \frac{G M_K M}{r} = -\frac{1}{2} \frac{G M_K M}{r} < 0$$

οπότε $L^2 = M^2 v^2 r^2 = G M_K M^2 r \Rightarrow r_0 = \frac{L^2}{G M_K M^2}$

$$\Rightarrow \underline{E} = -\frac{1}{2} \underline{\frac{G^2 M_K^2 M^3}{L^2}} = -\frac{1}{2} \underline{\frac{C^2 M}{L^2}} .$$

$\Rightarrow$ για $\varepsilon = 0$ έχουμε κίνηση με σταθερή ακτίνα $r_0 = \frac{L^2}{G M_K M^2}$ και αρνητική ενέργεια

(v) $\underline{E_{min} < E < 0}$, $\underline{E_{min} = -\frac{1}{2} \frac{G^2 M_K^2 M^3}{L^2}}$

$$\frac{dV_{ev}}{dr} = 0 \Rightarrow -\frac{L^2}{M r^3} + \frac{G M_K M}{r^2} = 0 \quad , \quad r \neq \infty$$

$$\Rightarrow r_0 = \frac{L^2}{G M_K M^2}$$

$$\Rightarrow E_{min} = 0 + \frac{L^2}{2 M r_0^2} - \frac{G M_K M}{r_0} = -\frac{1}{2} \frac{G^2 M_K^2 M^3}{L^2}$$

$\Rightarrow$ $\underline{0 < \varepsilon < 1}$, $\underline{\text{έλλειψη}}$.

(vi) $\varepsilon > 1 \Leftrightarrow E > 0$

κίνηση μέχρι το $r \to \infty$ με V_∞ οριακή ταχύτητα διάφορη του μηδενός και $E = \frac{1}{2} M V_\infty^2 > 0$ για $r \to \infty$
στροφορμή $L = M V_\infty H$ σταθερή.
H = η κάθετη απόσταση του κέντρου O από την ασύμπτωτη της κίνησης.

(vii) για $E = 0 \Rightarrow \varepsilon = 1$
είναι η οριακή τιμή όπου έχουμε κίνηση μέχρι το άπειρο
και η υπερβολή γίνεται παραβολή.
η ταχύτητα τείνει στο μηδέν στο άπειρο
αλλά η στροφορμή είναι σταθερή.

Νόμοι του Kepler

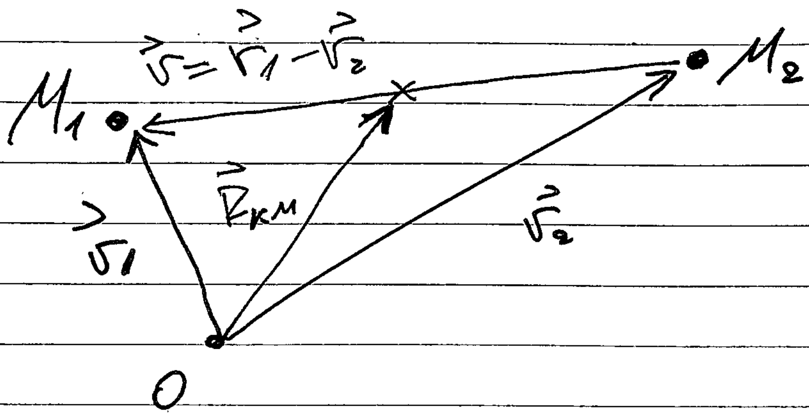
(1) Όλοι οι πλανήτες διαγράφουν ελλειπτικές τροχιές, με τον Ήλιο σε μια από τις εστίες της τροχιάς.

(2) Το διάνυσμα θέσης, με αρχή τον Ήλιο και τέλος έναν πλανήτη, διαγράφει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους.

(3) Τα τετράγωνα των περιόδων περιφοράς είναι ανάλογα προς τους κύβους των μεγάλων ημιαξόνων των αντίστοιχων ελλείψεων

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G M_H} a^3 .$$

Ε) Το πρόβλημα των δύο σωμάτων, ανηγμένη μάζα.



κεντρική δύναμη

$$V(r), \quad \vec{F} = -\frac{dV}{dr}\hat{r}$$

$$\vec{R}_{KM} = \frac{M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2}{M_1 + M_2}$$

Νόμος του Νεύτωνα

$$M_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12} = F(r)\,\hat{r}$$

$$M_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{21} = -F(r)\,\hat{r}$$

$$M \ddot{\vec{R}}_{KM} = M_1 \ddot{\vec{r}}_1 + M_2 \ddot{\vec{r}}_2 = F(r)\,\hat{r} - F(r)\,\hat{r} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{KM} = \vec{V}_{KM}\, t + \vec{R}_{oKM}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{1}{M_1}F(r)\,\hat{r} + \frac{1}{M_2}F(r)\,\hat{r}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right) F(r)\,\hat{r} = \frac{1}{\mu} F(r)\,\hat{r}$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \Rightarrow \mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$$

ανηγμένη μάζα

$$\boxed{\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(r)}$$

για το σύστημα βαρύτητας έχουμε:

$$\boxed{\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\frac{M_1 M_2}{r^2}\hat{r}}$$

Κίνηση ενός σώματος μάζας μ γύρω από το σώμα 2 που το θεωρούμε ακίνητο.

Η ανηγμένη μάζα μ είναι μικρότερη από τα M_1 και M_2.

Στροφορμή ως προς το Κέντρο Μάζας:

$$M_1\vec{r}_1' + M_2\vec{r}_2' = 0, \quad M_1\vec{u}_1 + M_2\vec{u}_2 = 0$$

$$\vec{L} = M_1\vec{r}_1'\times\vec{u}_1 + M_2\vec{r}_2'\times\vec{u}_2 = (\vec{r}_1' - \vec{r}_2')\times M_1\vec{u}_1$$

$$M_1\vec{u}_1 = \frac{M}{M}M_1\vec{u}_1 = \frac{M_1}{M}(M_1\vec{u}_1 + M_2\vec{u}_1) =$$

$$= \frac{M_1}{M}(-M_2\vec{u}_2 + M_2\vec{u}_1) = \frac{M_1 M_2}{M}(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$$

$$\boxed{\vec{L} = \mu\,\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}} \qquad \vec{r} = \vec{r}_1' - \vec{r}_2', \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$$

Ενέργεια ως προς το Κέντρο Μάζας:

$$E = \frac{1}{2}M_1 u_1^2 + \frac{1}{2}M_2 u_2^2 + V(r) = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 + V(r)$$

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \mu\vec{u}^2 = \mu(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)^2 = \mu\vec{u}_1^2 + \mu\vec{u}_2^2 - 2\mu\vec{u}_1\vec{u}_2$$

$$= M_1\vec{u}_1^2\frac{M_2}{M} + M_2\vec{u}_2^2\frac{M_1}{M} + \frac{M_1\cancel{M_2}}{M_1+M_2}\vec{u}_1^2\frac{M_1}{\cancel{M_2}}$$

$$+ \frac{\cancel{M_1}M_2}{}\vec{u}_2^2\frac{M_2}{} = M_1\vec{u}_1^2\frac{\cancel{M_1+M_2}}{} + M_2\vec{u}_2^2\frac{\cancel{M_1+M_2}}{}$$