Αλυσίδες Ραδιενεργών Διασπάσεων

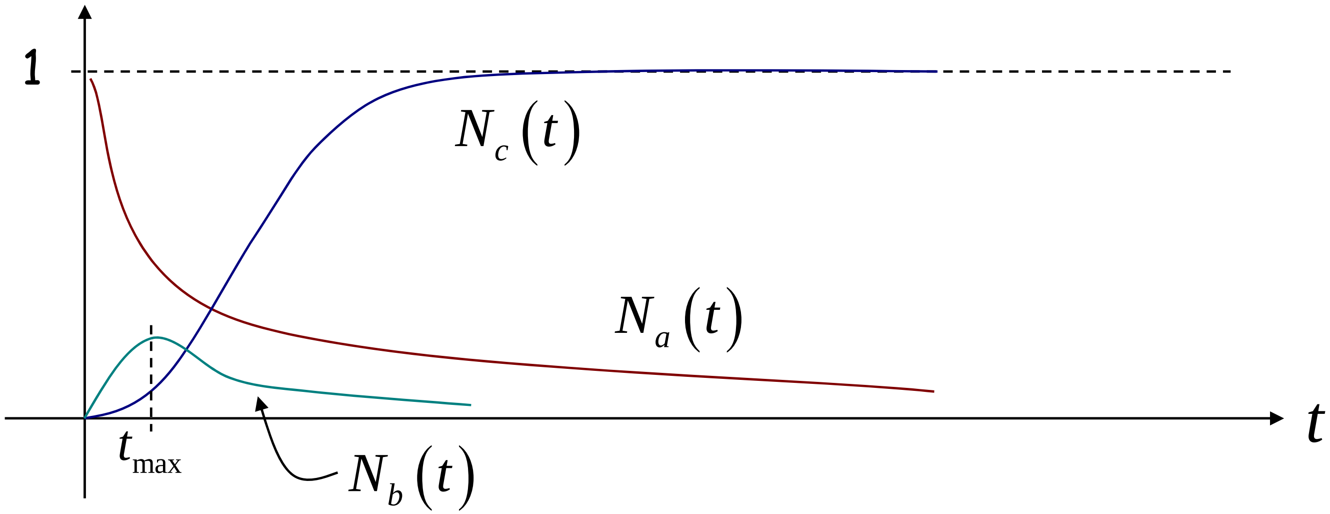
- Διαδοχικές διασπάσεις: $A \xrightarrow{\lambda_a} B \xrightarrow{\lambda_b} C$ (σταθερός πυρήνας)

$$
\begin{aligned}
dN_a &= -\lambda_a N_a dt \\
dN_b &= \lambda_a N_a dt - \lambda_b N_b dt \begin{pmatrix}\text{η ενεργότητα}\\ \text{της πηγης b}\\ \text{δεν ειναι } \lambda_b N_b\end{pmatrix} \\
dN_c &= \lambda_b N_b dt
\end{aligned}
$$

Αρχικές συνθήκες:

$$
\begin{aligned}
&N_a(0) \\
&N_b(0) = 0 \\
&N_c(0) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases}
N_a(t) = N_a(0) e^{-\lambda_a t} \\
N_b(t) = N_a(0) \dfrac{\lambda_a}{\lambda_b - \lambda_a}\left(e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_b t}\right) \\
N_c(t) = N_a(0)\left[1 + \dfrac{1}{\lambda_b - \lambda_a}\left(\lambda_a e^{-\lambda_b t} - \lambda_b e^{-\lambda_a t}\right)\right]
\end{cases}
$$



$$\frac{dN_b}{dt} = 0 \Rightarrow t_{max} = \frac{\ln(\lambda_b / \lambda_a)}{\lambda_b - \lambda_a}$$

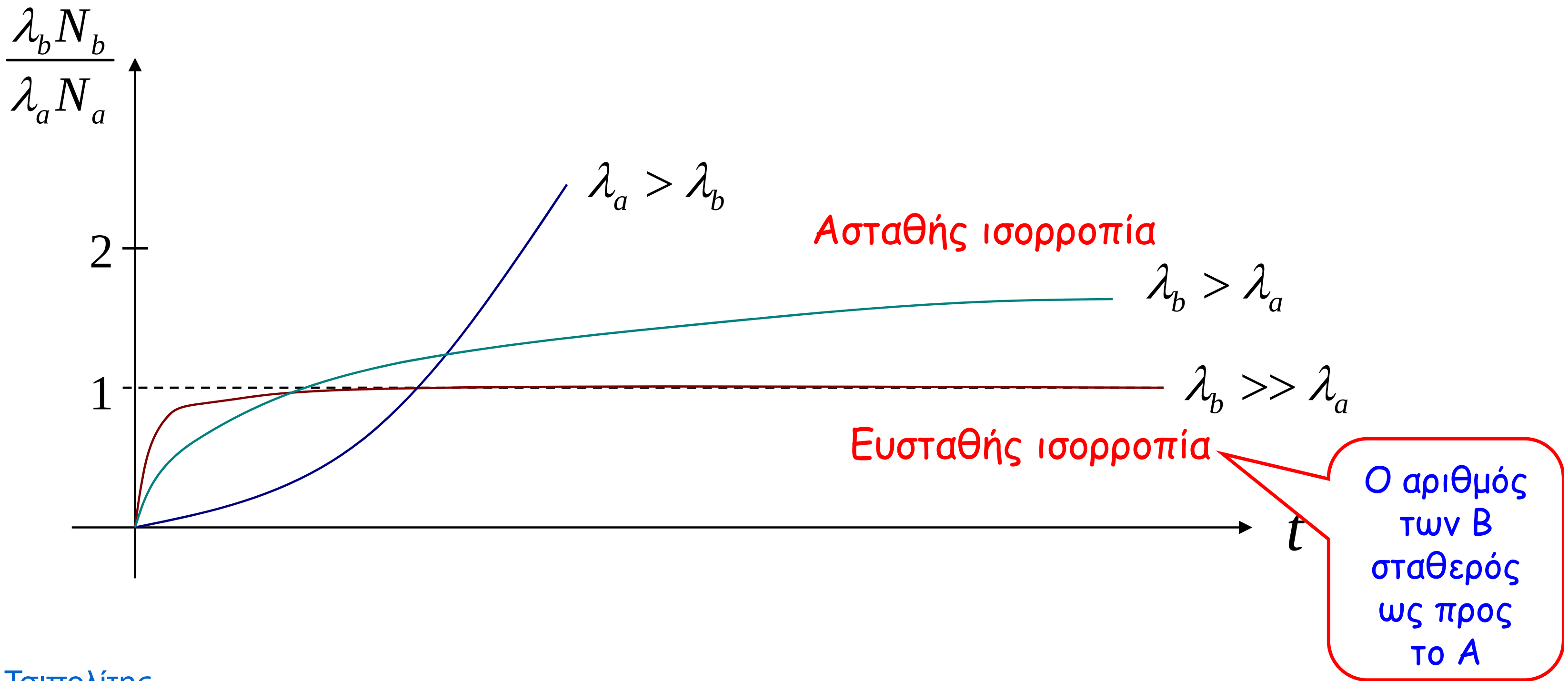
Για $t = t_{max}$: $\lambda_a N_b(t_{max}) = \lambda_a N_a(t_{max})$

Ιδανική ισορροπία!

$\forall$ **t, ο λόγος των ενεργοτήτων Β/Α:**

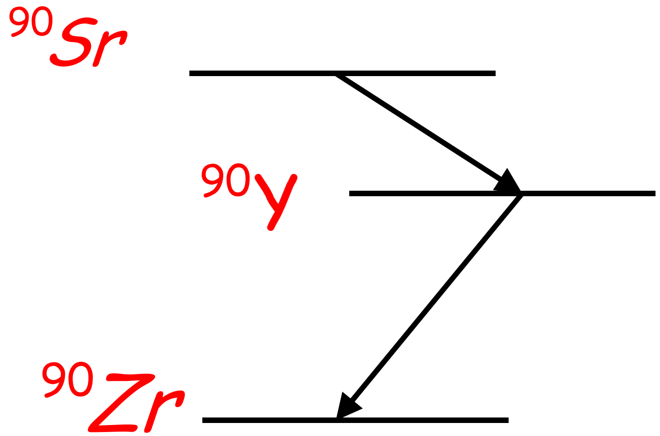
$$\frac{\lambda_b N_b}{\lambda_a N_a} = \frac{\lambda_b}{\lambda_b - \lambda_a} \cdot \left[1 - e^{-(\lambda_b - \lambda_a)\cdot t}\right]$$

1. Αν $\lambda_a > \lambda_b \Rightarrow (B/A)\uparrow$
2. Αν $\lambda_b > \lambda_a \Rightarrow (B/A)$ σταθεροποιείται σε >1 για t>>0 (ασταθής ισορροπία)
3. Αν $\lambda_b >> \lambda_a \Rightarrow (B/A) \rightarrow 1$ (ευσταθής ισορροπία: ο αριθμός των θυγατρικών πυρήνων παραμένει σταθερός σχετικά με τον αριθμό των πυρήνων A)



Γ. Τσιπολίτης

- Πχ. $^{90}Sr \xrightarrow[28y]{\beta^-} {}^{90}Y \xrightarrow[64,8h]{\beta^-} {}^{90}Zr$



End-point energy για τα β: 0,546 MeV και 2,27 MeV

Ο αριθμός των πυρήνων του ^{90}Y είναι σταθερός καθώς αναγενώνται από το ^{90}Sr

Οπότε ουσιαστικά έχουμε μία πηγή ^{90}Y με χρόνο ημιζωής 28 y αντί για 65 h.

Παραγωγή ραδιοϊσοτόπων με βομβαρδισμό

- Εφαρμογή των αλυσιδωτών ραδιενεργών διασπάσεων είναι η παραγωγή ραδιοϊσοτόπων από την πυρηνική αντίδραση:

$$A(x,y)B \xrightarrow{\lambda_b} C$$

Αν $\sigma(A \to B)$ είναι η ολική ενεργός διατομή,

F: η ροή σωματιδίων x και

N_a: ο αριθμός πυρήνων A

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dN_a}{dt} = -F \cdot \sigma(A \to B) \cdot N_a = -\lambda_a N_a \\ \dfrac{dN_b}{dt} = -\lambda_b N_b + \lambda_a N_a \\ \dfrac{dN_c}{dt} = \lambda_b N_b \end{array} \right\}$$

Το πλήθος των πυρήνων B θα είναι μέγιστο σε χρόνο:

$$t_{max} = \frac{\ln(\lambda_b / \lambda_a)}{\lambda_b - \lambda_a}$$

Γ. Τσιπολίτης

Παράδειγμα

- Cu αποτελείται από 69% ^{63}Cu και 31% ^{65}Cu. Όταν βομβαρδίζεται από θερμικά νετρόνια ενός αντιδραστήρα σχηματίζονται ^{64}Cu και ^{66}Cu. Οι χρόνοι ημιζωής των ισοτόπων είναι 12.7 h και 5.1 min αντίστοιχα. Ποια είναι η ενεργότητα κάθε ισοτόπου αν 1 gr Cu δεχτεί ροή 10^9 $n/cm^2 \cdot s$ για 15 min;

$$\sigma\left({}^{63}Cu + n \rightarrow {}^{64}Cu\right) = 4.4 \text{ b}$$

$$\sigma\left({}^{65}Cu + n \rightarrow {}^{66}Cu\right) = 2.2 \text{ b}$$

$$\Lambda_a = F \cdot \sigma\left(A \rightarrow B\right) = \begin{cases} 10^9 \times \left(4.4 \times 10^{-24}\right) = 4.4 \times 10^{-15} s^{-1} \quad {}^{64}Cu \\ 10^9 \times \left(2.2 \times 10^{-24}\right) = 2.2 \times 10^{-15}\ s^{-1} \quad {}^{66}Cu \end{cases}$$

Ρυθμός διάσπασης:

$$\lambda_b = \frac{1}{\tau_m} = \begin{cases} \dfrac{\ln 2}{12.7} = 0.054\ \mathrm{h}^{-1}\ {}^{64}Cu \\ \dfrac{\ln 2}{5.1} = 0.136\ \mathrm{min}^{-1}\ {}^{66}Cu \end{cases}$$

Ενεργότητα κάθε ισοτόπου μετά από χρόνο t είναι $\lambda_b N_b(t)$

Αφού $\lambda_a \ll \lambda_b$ τότε $\lambda_b N_b(t) = N_a(0)\lambda_a(1\text{-}e^{-\lambda_a t})$

για $N_a(0) = \left(\dfrac{6.023\times 10^{23}}{A}\right)\times(\text{περιεκτικότητα})\times(1g)$

Γ. Τσιπολίτης

$$\lambda_b N_b(15\,\mathrm{min}) = \begin{cases} 3.86\times10^5 \text{ dps=10.43 } \mu\mathrm{Ci} & {}^{64}Cu \\ 5.62\times10^6 \text{ dps=152 } \mu\mathrm{Ci} & {}^{66}Cu \end{cases}$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο υπολογισμός του t_{max}

$$t_{max} = \frac{\ln(\lambda_b/\lambda_a)}{\lambda_b - \lambda_a}$$

$$t_{max} = \begin{cases} 16{,}8 \text{ d} & \text{για} \quad {}^{64}Cu \\ 3{,}4 \text{ h} & \text{για} \quad {}^{66}Cu \end{cases}$$

Ασκήσεις - Παραδείγματα

Κινητική Ενέργεια:

$$K=\int F dx=\int \frac{dp}{dt}dx=\int dp\cdot u=\int (dm\cdot u+m\cdot du)\cdot u=\int u^2 dm+\int mudu$$

Όμως $m=\dfrac{m_o}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\Rightarrow m^2c^2-m^2u^2=m_o^2c^2\;(1)$

Το διαφορικό της (1) είναι: $\cancel{2}mdm\cdot c^2-\cancel{2}mdm\cdot u^2-m^{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}udu=0$

$$\Rightarrow u^2dm+mudu=c^2dm$$

Επομένως η έκφραση για την κινητική ενέργεια γίνεται:

$$K=\int c^2dm=mc^2-m_oc^2=E-E_o\Rightarrow \boxed{E=K+E_o}$$

Επίσης $(1)\Rightarrow m^2c^2=m_o^2c^2+m^2u^2\overset{\times c^2}{\Rightarrow} m^2c^4=m_o^2c^4+m^2u^2c^2\Rightarrow$

$$\Rightarrow E^2=m_o^2c^4+p^2c^2\Rightarrow E=\sqrt{p^2c^2+m_o^2c^4}$$

Επομένως $\boxed{\left(K+m_oc^2\right)^2=m_o^2c^4+p^2c^2}$

Παράδειγμα 1: Ποια είναι η ταχύτητα ενός e^- με K=2 MeV;

$$K = E - E_o = mc^2 - m_o c^2 = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - m_o c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{K + m_o c^2}{m_o c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \Rightarrow 1 - \frac{u^2}{c^2} = \left(\frac{m_o c^2}{K + m_o c^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{u^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{m_o c^2}{K + m_o c^2}\right)^2 \Rightarrow u = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_o c^2}{K + m_o c^2}\right)^2}$$

Άρα

$$u = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0.511}{2 + 0.511}\right)^2} \simeq c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0.5}{2.5}\right)^2} = c \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{c\sqrt{24}}{5} \Rightarrow$$

$$u \simeq 0.98c$$

Παράδειγμα 2: Ποιά είναι η ισοδύναμη μάζα φωτονίου 5000 Å;
(1 Å=10^{-10} m)

$$mc^2 = E = h\nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} \Rightarrow m = \frac{h\cancel{c}}{\lambda c^{\cancel{2}}}$$

$$\Rightarrow m = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J{\times}s}}{\left(5 \times 10^{3} \times 10^{-10}\ \mathrm{m}\right) \cdot \left(3 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}\right)} \simeq 4.42 \times 10^{-36}\ \mathrm{kg}$$

Για μικρές ταχύτητες (u/c<<1):

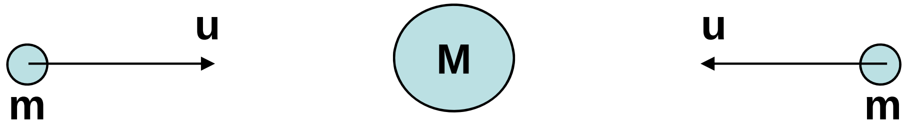
$$\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{c^2}+\dots$$

Άρα

$$K=E-E_o=mc^2-m_oc^2=\frac{m_oc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}-m_oc^2=$$

$$=m_oc^2\left[\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}-1\right]=m_oc^2\left[\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{c^2}+\dots\right)-1\right]\simeq\frac{1}{2}m_ou^2$$

Δύο όμοια σώματα με μάζα ηρεμίας m_o κινούνται με ταχύτητες ίσου μέτρου αλλά αντίθετης φοράς



$$E_f = E_i \Rightarrow Mc^2 = 2mc^2 = 2 \cdot \frac{m_o}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow M = \frac{2m_o}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Παράδειγμα 3: Πόσες διασπάσεις ανά sec προέρχονται από υλικό ενεργότητας 2 μCi;

$$1\ Ci = 3.7 \times 10^{10}\ \text{dps}$$

$$N = 2 \times 10^{-6} \times 3.7 \times 10^{10}\ \text{dps} \Rightarrow N = 7.4 \times 10^{4}\ \text{dps}$$

Παράδειγμα 4: Η σταθερά διάσπασης του ^{226}Ra είναι:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0.69}{1500\ \text{yrs}} = \frac{0.69}{1500 \times 365 \times 864000\ \sec} \Rightarrow$$

$$\lambda = 1.46 \times 10^{-11}\ \sec^{-1}$$

Παράδειγμα 5: Πόση είναι η ενεργότητα 1 gr ^{226}Ra;

Η ενεργότητα υπολογίζεται από τη σχέση $-\dfrac{dN}{dt} = \lambda \cdot N$

Όπου $\lambda = 1.46 \times 10^{-11}\ s^{-1}$ (βλ. παράδειγμα 4)

Αν A gr Ra έχουν R_o=6.023x10^{23} πυρήνες
τα m=1 gr θα έχουν έστω N πυρήνες

$$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \Rightarrow N = R_o \cdot \frac{m}{A}$$

Επομένως:

$$\lambda \cdot N = \left(1.46 \times 10^{-11}\ s^{-1}\right) \cdot \left(6.023 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}\right) \cdot \frac{1\ gr}{226} = 3.9 \times 10^{10}\ \text{dps}$$

Παράδειγμα 6:

Συμπληρώστε την πυρηνική αντίδραση: $^{2}_{1}d + ^{16}_{8}O \rightarrow ^{4}_{2}He + ^{A}_{Z}X$

Θα είναι: Z=7 και A=14, δηλαδή $^{14}_{7}X \equiv ^{14}_{7}N$

Παράδειγμα 7: Μετά από πόσο χρονικό διάστημα από 5 mg ^{22}Na ($T_{1/2}$=2.6 y) θα έχει μείνει 1 mg;

$$m = m_o \cdot e^{-\lambda t} = m_o \cdot e^{-t/\tau_m} \quad , \quad T_{1/2} = \tau_m \cdot \ln 2$$

$$\Rightarrow m = m_o \cdot e^{-t \cdot \frac{\ln 2}{T_{1/2}}} \Rightarrow t = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{m_o}{m}\right) \Rightarrow t = \frac{2.6y}{0.69} \cdot \ln\left(\frac{5}{1}\right)$$

$$\Rightarrow t = 6.04 \text{ y}$$

Αλληλεπιδράσεις

Γ. Τσιπολίτης

Φορτισμένα Σωματίδια

- Σωματίδιο μάζας m_o, ταχύτητας υ=βc "συγκρούεται" με ένα από τα ηλεκτρόνια. Η μέγιστη μεταφερόμενη ενέργεια είναι:

$$E^{kin}_{max} = \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + 2\gamma \frac{m_e}{m_o} + \left(\frac{m_e}{m_o}\right)^2} = \frac{2m_e p^2}{m_o^2 + m_e^2 + 2m_e E / c^2}, \qquad \text{όπου } E = m_o \gamma c^2$$

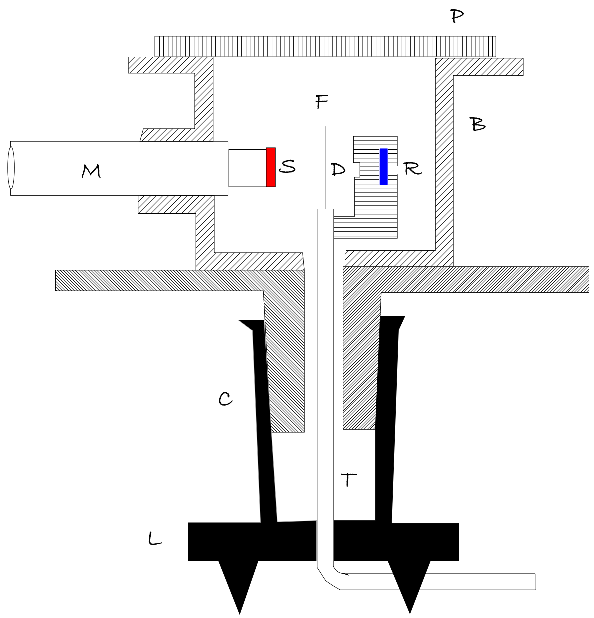
για $m_0 \gg m_e$ και $\frac{2\gamma m_e}{m_0} \ll 1 \Rightarrow E^{kin}_{max} = 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$

Για σχετικιστικό σωματίδιο ($E^{kin} \sim E \sim pc$):

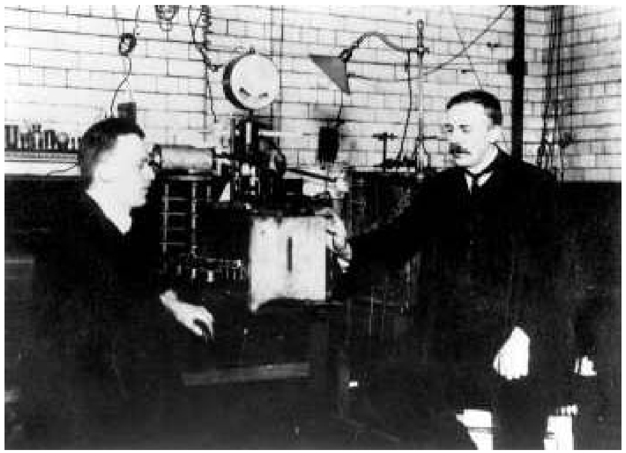
$$E^{kin}_{max} = \frac{E^2}{E + \frac{m_o c^2}{2m_e}}$$

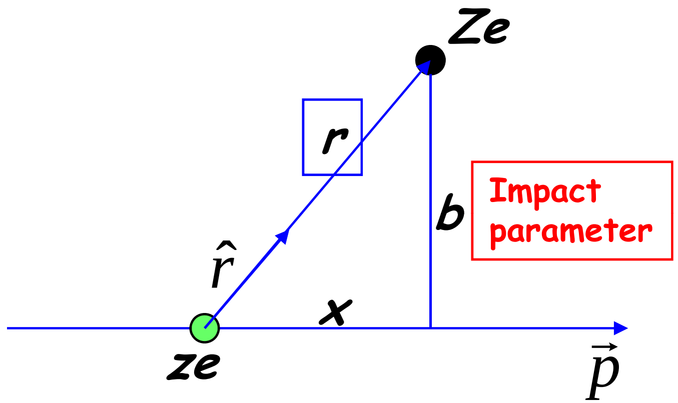
- μ – e : $E^{kin}_{max} = \frac{E^2}{E + 11}$ (E σε GeV)
- e – e : $E^{kin}_{max} = \frac{p^2}{\frac{E}{c^2} + m_e} = \frac{E^2 - m_e^2 c^4}{E + m_e c^2} = E - m_e c^2$

Σκέδαση Rutherford



M	microscope
S	scintillation screen
F	scattering foil
D	diaphragm
R	radioactive source
B	vacuum chamber body

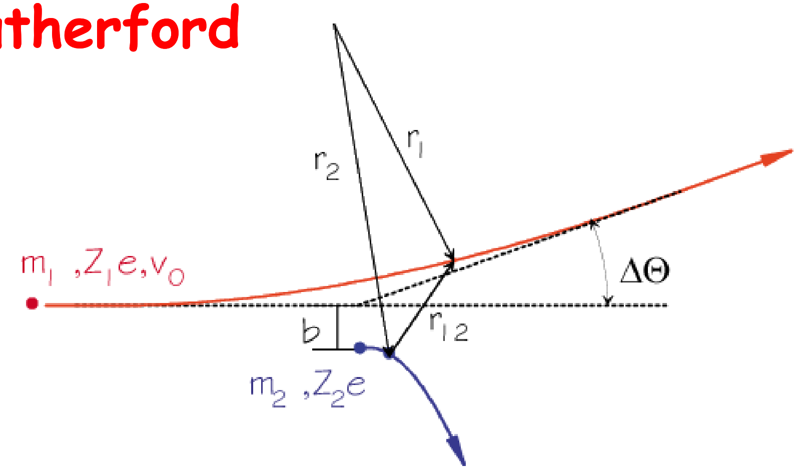




$$\vec{F} = \frac{zeZe}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Σκέδαση Rutherford

- Μεταφερόμενη ορμή στο Z_2e



$$p_b = \int_{-\infty}^{+\infty} F_b dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_1 Z_2 e^2}{r^2} \frac{b}{r} \frac{dx}{\beta c}$$

$$p_b = \int_{-\infty}^{+\infty} F_b dt = \frac{z_1 Z_2 e}{\beta c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b dx}{\left(\sqrt{x^2 + b^2}\right)^3} = \frac{z_1 Z_2 e^2}{\beta c b} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x/b)}{\left(\sqrt{1 + (x/b)^2}\right)^3}$$

$$p_b = \frac{2 z_1 Z_2 e^2}{\beta c b} = \frac{2 r_e m_e c}{\beta c b} z_1 Z_2$$

με $r_e = \dfrac{e^2}{m_e c^2}$

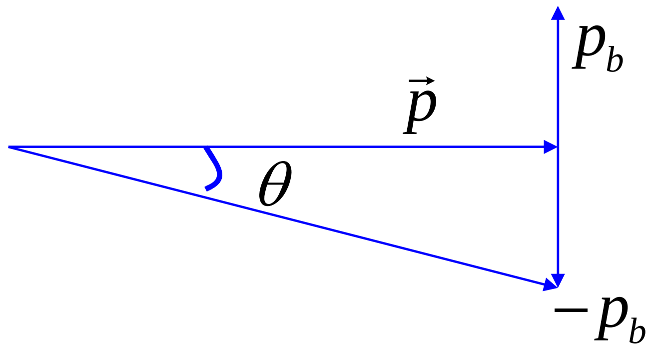
Κλασσική ακτίνα e

Γ. Τσιπολίτης

Σκέδαση Rutherford

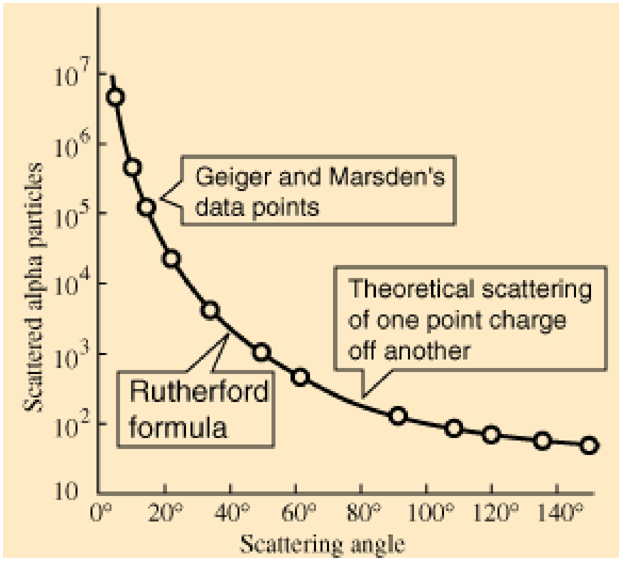
- Γωνία σκέδασης

$$\theta = \frac{p_b}{p} = \frac{2zZe^2}{bc\beta}\frac{1}{p}$$



$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{N_0}{256\pi^2\varepsilon_0^2}[nt]Z_1^2Z_2^2e^4\frac{1}{\left(\frac{1}{2}m_1v_0^2\right)^2}\frac{1}{\sin^4\frac{\Theta_{CM}}{2}}$$

N_0 number of beam particles
n target material in atoms/volume
t target thickness
and b is the impact parameter



Γ. Τσιπολίτης