ΕΜΠ ΣΕΜΦΕ

ΦΥΣΙΚΗ ΙΙΙ Ταλαντώσεις και Κύματα
1Η ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Διδάσκοντες: Η.Κ. Κατσούφης (Α - Λ), Ε. Φωκίτης (Μ - Ω) 6. 11. 06

Οι απαντήσεις πρέπει να δοθούν μέχρι και τη Δευτέρα 27.11.06

1. Α) Pain Πρόβλημα 1.6. Β) 1.8 (σώμα πάνω σε βάση που ταλαντώνεται)

Α) Ένα σωματίδιο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση κατά μήκος του άξονα των x με πλάτος μετατόπισης a και χρειάζεται χρόνο dt για να κινηθεί από το x στο $x+dx$. Δείξτε ότι η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο μεταξύ x και $x+dx$ είναι

$$\frac{dx}{\pi(a^2-x^2)^{1/2}}$$

(στην κβαντομηχανική, η πιθανότητα αυτή δεν είναι μηδενική για $x>a$).

Β) Μια μάζα βρίσκεται πάνω σε μια βάση που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση στην κατακόρυφη διεύθυνση με συχνότητα 5 Hz. Δείξτε ότι η μάζα θα αρχίσει να χάνει την επαφή της με τη βάση όταν η μετατόπιση υπερβεί τα 10^{-2} m.

2. Α) Pain, 1. 14 και Β) 1.15 (Σύνθεση δύο κάθετων ταλαντώσεων με διαφορετικό πλάτος και διαφορά φάσης δφ)

Α) Οι συντεταγμένες ενός σωματιδίου με μάζα m είναι

$$x = a\sin\omega t$$
$$y = b\cos\omega t$$

Απαλείφοντας το t δείξτε ότι το σωματίδιο ακολουθεί ελλειπτική τροχιά και, προσθέτοντας την κινητική και δυναμική του ενέργεια σε κάθε σημείο (x, y), δείξτε ότι η έλλειψη είναι τροχιά σταθερής ενέργειας ίσης με το άθροισμα των επί μέρους ενεργειών των απλών αρμονικών ταλαντώσεων.

Τί παριστάνει η παράσταση $m(x\dot{y}-y\dot{x})$; Δείξτε ότι είναι σταθερή.

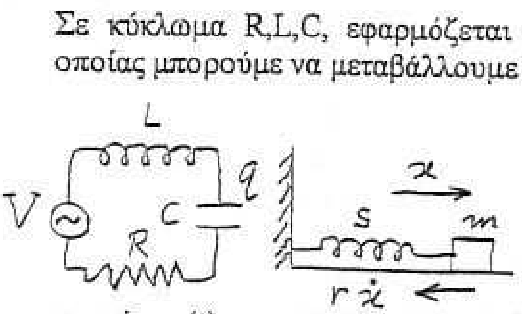
Β) Δυο απλές αρμονικές κινήσεις με την ίδια συχνότητα έχουν διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους κατά μήκος των αξόνων x και y. Μεταξύ τους υπάρχει μια διαφορά φάσης

$$\delta = \phi_2 - \phi_1$$

τέτοια ώστε οι κύριοι άξονες της προκύπτουσας ελλειπτικής τροχιάς να σχηματίζουν μια γωνία με τους άξονες x και y. Δείξτε ότι η μέτρηση δυο διαφορετικών τιμών του x (ή του y) επαρκεί για τον προσδιορισμό της διαφοράς φάσης.

(Εισήγηση: χρησιμοποιήστε την εξίσωση (1.69) και μετρήστε το $y(max)$ και το y για $x=0$).

3. Σε κύκλωμα R,L,C, εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση V = V₀cos(ωt) της οποίας μπορούμε να μεταβάλλουμε τη γωνιακή συχνότητα ω.



Α) Δείξτε ότι το <u>πλάτος</u> ταλάντωσης του φορτίου στον πυκνωτή γίνεται μέγιστο, όταν η συχνότητα της πηγής γίνει $\omega = \{ 1/(LC) - R^2/(2L^2) \}^{1/2}$.

Β) Βραχυκυκλώνουμε την ηλεκτρική πηγή. Γράψτε τη χρονική εξάρτηση του φορτίου q(t) του πυκνωτή, αν η απόσβεση του κυκλώματος είναι ασθενής. Να μη λύσετε τη διαφορική εξίσωση του κυκλώματος, αλλά να χρησιμοποιήσετε τα συμπεράσματα για το αντίστοιχο μηχανικό σύστημα ενός αρμονικού ταλαντωτή μάζας m, συντελεστή απόσβεσης r και σταθεράς ελατηρίου s.

4. A) Pain 2.3 και B) 2.4 (Εξαναγκασμένη ταλάντωση χωρίς απόσβεση και συμπεριφορά κοντά στο συντονισμό)

A) Η εξίσωση $m\ddot{x}+sx=F_0\sin\omega t$ περιγράφει την κίνηση ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή χωρίς απόσβεση που διεγείρεται από μια δύναμη με γωνιακή συχνότητα ω. Λύνοντας την εξίσωση σε διανυσματική μορφή δείξτε ότι η λύση για τη μόνιμη κατάσταση δίνεται από τη σχέση

$$x=\frac{F_0\sin\omega t}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \quad \text{όπου} \quad \omega_0^2=\frac{s}{m}$$

Σχεδιάστε τη συμπεριφορά του πλάτους του x συναρτήσει της ω και προσέξτε ότι η αλλαγή στο πρόσημο, καθώς η ω υπερβαίνει την ω_0, ισοδυναμεί με μεταβολή π ακτινίων στη φάση της μετατόπισης. Δείξτε τώρα ότι η γενική λύση για τη μετατόπιση είναι

$$x=\frac{F_0\sin\omega t}{m(\omega_0^2-\omega^2)}+A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$$

όπου τα A και B είναι σταθερά.

B) Αν $x=\dot{x}=0$ για $t=0$, δείξτε ότι $x=\frac{F_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right)$ και γράφοντας $\omega=\omega_0+\Delta\omega$ ($\Delta\omega$ μικρό) δείξτε ότι κοντά στον συντονισμό, $x=\frac{F_0}{2m\omega_0^2}(\sin\omega_0 t-\omega_0 t\cos\omega_0 t)$. Σχεδιάστε το $x(t)$.

5. (Γραμμικό τριατομικό μόριο με άνισες ατομικές μάζες)

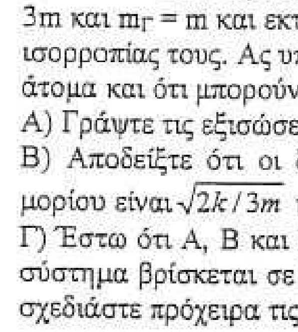
Τα άτομα ενός γραμμικού τριατομικού μορίου ΑΒΓ έχουν μάζες $m_A = 2m$, $m_B = 3m$ και $m_\Gamma = m$ και εκτελούν διαμήκεις ταλαντώσεις γύρω από τις θέσεις ευσταθούς ισορροπίας τους. Ας υποθέσουμε ότι δυνάμεις εξασκούνται μόνο ανάμεσα στα γειτονικά άτομα και ότι μπορούν να προσομοιωθούν από ίδια ελατήρια σταθεράς k.

A) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης των ατόμων.

B) Αποδείξτε ότι οι δύο ιδιοσυχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης (ΚΤΤ) του μορίου είναι $\sqrt{2k/3m}$ και $\sqrt{3k/2m}$. Ποια είναι η τρίτη ιδιοσυχνότητα;

Γ) Έστω ότι Α, Β και Γ είναι, αντίστοιχα, τα πλάτη ταλάντωσης των τριών ατόμων, όταν το σύστημα βρίσκεται σε ΚΤΤ. Βρείτε τις σχέσεις μεταξύ των πλατών αυτών σε κάθε ΚΤΤ και σχεδιάστε πρόχειρα τις μέγιστες απομακρύνσεις.

6. Σε ένα σύστημα δύο ίδιων συζευγμένων εκκρεμών θεωρούμε το ένα εκκρεμές, (με απομάκρυνση $x_1=x_1(t)$), ως «είσοδο», στην οποία εφαρμόζεται μία εξωτερική αρμονική δύναμη $F(t)=F_0\cos(\omega t)$. Το άλλο εκκρεμές (με απομάκρυνση $x_2=x_2(t)$) θεωρείται ως «έξοδος» της οποίας μας ενδιαφέρει η σχετική απόκριση x_2/x_1. Αμελήστε την απόσβεση στην κίνηση των εκκρεμών και δείξτε ότι : $\frac{x_2}{x_1}=\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{\omega_1^2+\omega_2^2-2\omega^2}$, όπου ω_1 και ω_2 είναι οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος των δύο εκκρεμών. Σχεδιάστε την απόκριση x_2/x_1 ως συνάρτηση της συχνότητας ω της εξωτερικής δύναμης. Δείτε και Pain 3.10

7. 

Το μόριο του βενζολίου μπορεί να προσεγγιστεί με έξι ίσες σημειακές μάζες, m, που μπορούν να ολισθαίνουν, χωρίς τριβή, στην περιφέρεια οριζοντίου δακτυλίου. Οι μάζες συνδέονται με ίδια ελατήρια σταθεράς *s*. Οταν το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, οι μάζες είναι διατεταγμένες στις κορυφές κανονικού εξαγώνου. Θεωρείστε ότι το σύστημα διαταράσσεται λίγο από την κατάσταση ισορροπίας. α) Να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης για καθεμία από τις έξι μάζες. β) Να βρείτε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος, [(i) είτε παραγοντοποιώντας το ανάπτυγμα της ορίζουσας του ομογενούς γραμμικού συστήματος, για τα πλάτη ταλάντωσης, (ii) είτε αναζητώντας λύσεις της μορφής $y_r=C\cos(r\theta)\cos(\omega t)$ και επιβάλλοντας την συνθήκη $y_r=y_{r+6}$, (όπου r ο δείκτης θέσης). Στη δεύτερη περίπτωση, αν $\cos(\Theta_1)=\cos(\Theta_2)$, δεχθείτε ότι $\Rightarrow$ $\Theta_1=\Theta_2+2n\pi$, και προσδιορίστε τη μέγιστη τιμή του δείκτη n, πάνω από την οποία έχουμε επαναλαμβανόμενες λύσεις.]

ΕΜΠ ΣΕΜΦΕ

ΦΥΣΙΚΗ ΙΙΙ Ταλαντώσεις και Κύματα
2^H ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Διδάσκοντες: Η.Κ. Κατσούφης (Α - Λ), Ε. Φωκίτης (Μ - Ω) 7. 12. 06

Οι απαντήσεις πρέπει να δοθούν μέχρι τη Δευτέρα 7.01.07 (στο μάθημα)
(Επιτρέπεται η συνεργασία, όχι όμως η αντιγραφή. Να αναγραφεί η ημερομηνία και ώρα παράδοσης)

1.Σχέση διασποράς σε χορδή με πάχος. Διέγερση αρμονικών με σφυράκι.
Μακριά λεπτή χορδή πιάνου, μάζας m, και μήκους L, με κυκλική διατομή διαμέτρου D, τεντώνεται με τάση T μεταξύ των δύο ακλόνητων άκρων της. Η εξίσωση κύματος της χορδής έχει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T\pi D^2 L}{2m}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{D^a}{L}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right]$$

Υπολογίστε, με διαστατικά επιχειρήματα, την τιμή του εκθέτη a, και στη συνέχεια υπολογίστε τη σχέση διασποράς της χορδής ω=ω(k). Δείξτε ότι, για D<<L, η ανωτέρω εξίσωση τείνει προς την εξίσωση κύματος ιδανικής χορδής. Κατά τη χρονική στιγμή t=0, διεγείρουμε την ιδαν. χορδή από την κατάσταση ηρεμίας, χτυπώντας την, σε απόσταση $x_0 = L/3$ από το ένα άκρο της, με σφυράκι πλάτους L/100, που προσδίδει αρχική ταχύτητα v_0 στο αντίστοιχο τμήμα της χορδής. Εξηγείστε γιατί η απομάκρυνση y=y(x,t), κάθε σημείου x της χορδής από την κατάσταση ισορροπίας y=0 , ως συνάρτηση του χρόνου t, περιγράφεται με κατάλληλη σειρά Fourier, και δείξτε πως η μορφή της είναι:

$y(x,t)= \sum_{n} A_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t)$. Υπολογίστε τις σταθερές A_n, k_n και ω_n.

2. ΚΤΤ σε συσκευή λέιζερ. Ένα λέιζερ μπορεί να κατασκευαστεί, τοποθετώντας ένα σωλήνα πλάσματος σε συντονισμένη κοιλότητα συντονισμού που σχηματίζεται από δύο μεγάλης ανακλαστικότητας επίπεδα κάτοπτρα, τα οποία δρουν ως ακλόνητα τοιχώματα (κόμβοι) για τα φωτεινά κύματα. Ο σκοπός του σωλήνα πλάσματος είναι να παράγει φως διεγείροντας κανονικούς τρόπους μέσα στην κοιλότητα.
α) Ποιες είναι οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης της κοιλότητας συντονισμού; (Εκφράσετε την απάντηση σας συναρτήσει της απόστασης L, μεταξύ των κατόπτρων, και της ταχύτητας του φωτός c)
β) Υποθέστε πως ο σωλήνας πλάσματος εκπέμπει φως που επικεντρώνεται στη συχνότητα $\nu_0=5\times10^{14}$Hz με φασματικό εύρος Δν (που οφείλεται κυρίως στην κίνηση των φωτοβολούντων ατόμων, εύρος γνωστό με το όνομα διεύρυνση Doppler). Η τιμή του Δν είναι τόση ώστε όλοι οι κανονικοί τρόποι της κοιλότητας των οποίων η συχνότητα βρίσκεται στο διάστημα $\pm1.0\times10^9$ Hz από το ν_0, θα διεγείρονται από το σωλήνα πλάσματος.
(1) Πόσοι τρόποι θα διεγερθούν αν L=1.5m;
(2) Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή του L έτσι ώστε μόνο *ένας* κανονικός τρόπος ταλάντωσης να διεγείρεται (οπότε το λέιζερ θα έχει μόνο μία εξερχόμενη από την κοιλότητα συχνότητα). ($c=3\times10^8$m/sec).
3. Παλμός σε χορδή μεταβλητής τάσης. Ελαστικό αλλά μη εκτατό ομοιόμορφο καλώδιο μήκους L και μάζας M κρέμεται ελεύθερα απο την οροφή ενός δωματίου.
α) Δείξτε ότι η ταχύτητα ενός εγκάρσιου παλμού (που διαδίδεται προς τα κάτω) ως συνάρτηση της θέσης κατά μήκος του καλωδίου είναι $\upsilon(x) = [(l - x)g]^{1/2}$, όπου x είναι η απόσταση από το ανώτερο άκρο του καλωδίου.
β) Υπολογίστε το χρόνο που θα χρειαστεί ο παλμός αυτός για να διατρέξει κατερχόμενος όλο το μήκος του σχοινιού.

4. Χορδή με δακτύλιο και στυλίσκο με τριβή. Μία πολύ μακριά χορδή με γραμμική πυκνότητα μάζας μ και τάση Τ, είναι προσδεδεμένη σε μικρό δακτύλιο αμελητέας μάζας. Ο δακτύλιος γλιστράει σε κατακόρυφο στύλο με κατάλληλο λιπαντικό έτσι ώστε $F_y = -b\ \partial y/\partial t$ κατά την κατακόρυφη κίνηση του.
α) Βρείτε τη συνοριακή συνθήκη στο άκρο αυτό της χορδής. Εκφράστε τα αποτελέσματα σας συναρτήσει μερικών παραγώγων του $y(x,t)$ στη θέση του στύλου.
β) Δείξτε ότι η συνοριακή συνθήκη ικανοποιείται . Δείξτε πως η συνθήκη αυτή ικανοποιείται σε έναν προσπίπτοντα παλμό, $f(x-vt)$ και ένα ανακλώμενο παλμό $g(x+vt)$. Βρείτε το g συναρτήσει του f. Δείξτε πως το αποτέλεσμα ισχύει και στην οριακή περίπτωση $b\to 0$, καθώς και σε εκείνη με $b\to\infty$.

5. Ιδανική χορδή με δύο τμήματα

Ιδανική χορδή αποτελείται από δύο ομογενή τμήματα, μήκους $L/2$, με γραμμικές πυκνότητες μ_1 και $\mu_2 = \mu_1/4$, αντίστοιχα, τα οποία τείνονται με την ίδια τάση Τ. Το άκρο Ο είναι σταθερό, ενώ το Ο΄ φέρει δακτύλιο που μπορεί να ολισθαίνει σε κατακόρυφο στυλίσκο, χωρίς τριβή. **Α)** Γράψτε τη γενική μορφή των απομακρύνσεων $\psi_1(x, t)$ και $\psi_2(x, t)$ για τα δύο τμήματα για ένα κανονικό τρόπο ταλάντωσης (ΚΤΤ), λαμβάνοντας υπόψη τις συνοριακές συνθήκες.

Β) Βρείτε, συναρτήσει του L, τα δυνατά μήκη κύματος για τα δύο τμήματα σε ΚΤΤ.

6. Αναλογία ηλεκτρ. γραμμής μεταφοράς και χορδής με σφαιρίδια (Pain 3.21)

7. α) Απορροφούμενη ισχύς σε εξαναγκασμένη κίνηση ηλεκτρονίων.
β) Μηχανικό φίλτρο κραδασμών σε αεροσυμπιεστή (κομπρεσέρ)

Ἕνας ἀεροσυμπιεστής (κομπρεσέρ) χτυπᾶ τό ἔδαφος μέ συχνότητα 20 Hz. Ἡ λαβή κάνει τά χέρια τοῦ χειριστή νά δονοῦνται μέ τήν ἴδια συχνότητα. Σχεδιάστε ἕνα φίλτρο διέλευσης χαμηλῶν πού, ἄν ἐνσωματωνόταν στή λαβή, θά μείωνε τό πλάτος τῶν κραδασμῶν 10 φορές. Ἕνας ἁπλός τρόπος εἶναι νά αὐξήσουμε τή μάζα τοῦ μηχανήματος (εἰδικότερα τοῦ μέρους τοῦ μηχανήματος πού δέχεται τίς παλινδρομήσεις τῆς σφύρας τοῦ κομπρεσέρ) 10 φορές. Ἐπειδή ὅμως τό μηχάνημα ζυγίζει ἤδη 25 kg, δοκιμάστε νά τό ἐπιτύχετε μέ ἕνα συνδυασμό μεταβολῆς μάζας καί ἐλατηρίων.

8. α) Αντιανακλαστικό επίχρισμα σε γυαλί για ορατό φως. (Pain 4.10)
β) Αντιανακλαστική συνθήκη για κύμα σε διαχωριστική επιφάνεια. (Pain 4.9)

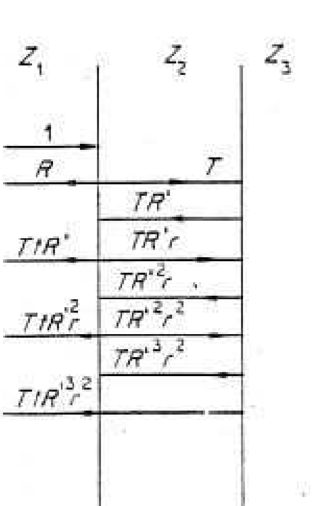
Στο σχήμα, υλικά μέσα με σύνθετη αντίσταση Z_1 και Z_3 χωρίζονται από ένα μέσον που έχει ενδιάμεση σύνθετη αντίσταση Z_2. Κύμα που πέφτει κάθετα στο πρώτο μέσο έχει μοναδιαίο πλάτος και οι συντελεστές ανάκλασης και μετάδοσης για πολλαπλή ανάκλαση φαίνονται στο σχήμα. Δείξτε ότι το ολικό ανακλώμενο πλάτος στο μέσο 1,

$$R + tTR'(1 + rR' + r^2R'^2 \ldots)$$

είναι μηδέν, αν $R = -R'$ και ότι αυτό ορίζει τη συνθήκη

$$Z_2^2 = Z_1 Z_3$$

(Παρατηρήστε ότι για μηδενική ολική ανάκλαση στο μέσον 1, η πρώτη ανάκλαση R αναιρείται από το άθροισμα όλων των επομένων ανακλάσεων.)



ΕΜΠ ΣΕΜΦΕ

ΦΥΣΙΚΗ ΙΙΙ Ταλαντώσεις και Κύματα
$3^{Η}$ ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Διδάσκοντες: Η.Κ. Κατσούφης (Α - Λ), Ε. Φωκίτης (Μ - Ω) 23.1.07

Οι απαντήσεις πρέπει να δοθούν μέχρι τη Δευτέρα 12.2.07 (στο μάθημα) (Επιτρέπεται η συνεργασία, όχι όμως η αντιγραφή. Να αναγραφεί η ημερομηνία και ώρα παράδοσης)

1. Α Χρησιμοποιήστε την τιμή της αυτεπαγωγής και της χωρητικότητας ενός ζεύγους επίπεδων παράλληλων αγωγών που απέχουν μεταξύ τους απόσταση a και έχουν πλάτος b για να δείξετε ότι η χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση ενός τέτοιου κυματοδηγού δίνεται από τη σχέση

$$Z_0=\frac{a}{b}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

όπου μ και ε είναι αντίστοιχα η μαγνητική διαπερατότητα και η ηλεκτρική διαπερατότητα του μεταξύ των αγωγών μέσου.

Β. **Ανακλάσεις σε γραμμές μεταφοράς**. Για μία γραμμή μεταφοράς με χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση Z_0 στην οποία διαδίδεται προς τα δεξιά μονοχρωματικό κύμα και η οποία περατώνεται δεξιά με μία σύνθετη αντίσταση φόρτου Z_L, να δείξετε πως οι συντελεστές ανάκλασης της τάσης και διάδοσης της τάσης (και έντασης) δίνονται από τις εκφράσεις:

$$R_V=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0},\quad R_I=-R_V,\quad T_V= V_L/V_+ = 2Z_L/(Z_L+Z_0)$$

$$T_I= I_L/I_+ = 2Z_0/(Z_L+Z_0)$$

2. Α) Έστω ότι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο ενος ηλεκτρομαγνητικού κύματος έχουν αντίστοιχα τις εκφράσεις

$$\mathbf{E}=\hat{x}\,f(z-ct)+\hat{y}\,g(z-ct)\ ,\ \ \mathbf{B}=\hat{x}\,p(z-ct)+\hat{y}\,h(z-ct)$$

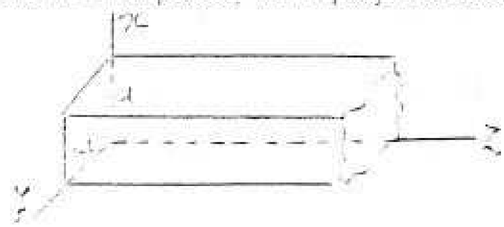
όπου f, g, p, h τυχαίες (όχι ημιτονοειδείς) συναρτήσεις, $\hat{x}$ και $\hat{y}$ μοναδιαία διανύσματα και c η ταχύτητα του φωτός. Δείξτε ότι οι εξισώσεις Maxwell, όταν δεν υπάρχουν πηγές, ($\rho=0$, $J=0$), οδηγούν στις συσχετίσεις $f = ch$ και $g = -cp$, δηλαδή ότι μόνο δύο συναρτήσεις από τις τέσσαρες είναι ανεξάρτητες.

Β) Θεωρήστε ότι κάποια χρονική στιγμή t στο σημείο (0, 0, 0) υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο $E_x \neq 0$ (που οφείλεται σε προσπίπτον επίπεδο ηλεκτρικό κύμα) και μεταβάλλεται με το χρόνο στη θέση αυτή, αλλά $B_y(0,0,0,t)=0$. Γιατί εμφανίζεται μαγνητικό πεδίο $B_y \neq 0$ στη γειτονική θέση $(0,0,0+dz)$ το οποίο μάλιστα μεταβάλλεται με το χρόνο; (Χρησιμοποιήστε κατάλληλη συνιστώσα μιας εξίσωσης Maxwell και το γεγονός ότι τα συζευγμένα πεδία E και B είναι εγκάρσια). Τι συνεπάγεται αυτή η εμφάνιση της B_y ;

3. Δυο εγκαρσια κύματα $A\sin k(x-\upsilon t)$ και $A\sin k(y-\upsilon t)$, όπου k το μέτρο των δύο κυματοδιανυσμάτων, διαδίδονται με ταχύτητα υ κατά μήκος μιάς τεταμένης μεμβρανης, που εκτείνεται απεριόριστα στο επίπεδο xy. Να μελετηθεί η συνισταμένη κινηση. Συγκεκριμενα:

Α) Ποια ειναι η διευθυνση διάδοσης του προκυπτοντος διαμορφωμένου κυματος;
Β) Πόση ειναι η ταχυτητα φασης και το μηκος κυματος της επαλληλίας των δύο κυματων;
Γ) Βρειτε τις θέσεις οι οποιες παραμενουν συνεχως ακινητες πανω στη μεμβράνη, ενω τα δυο κυματα διαδίδονται πανω στην επιφανεια της.

4. Μια οπτική ίνα (ΟΙ) από γυαλί τετραγωνικής διατομής πλευράς a , λειτουργεί ως κυματοδηγός στην ορατή περιοχή του Η- Μ φάσματος. Στις δύο διευθύνσεις x και y, κάθετα στον άξονα z της ΟΙ (και διεύθυνση διάδοσης του κύματος), δημιουργούνται στάσιμα κύματα και οι συνοριακές συνθήκες στα πεδία επιβάλλουν περιορισμούς



στους κυματικούς αριθμούς k_x και k_y που δίδονται από τις σχέσεις $k_x = m\pi/a$ και $k_y = \ell\pi/a$, όπου m , ℓ =1, 2 3, ... οι τάξεις των εγκάρσιων (στασίμων) τρόπων ταλάντωσης του Η- Μ πεδίου στο εσωτερικό του κυματοδηγού.

Α) Η σχέση διασποράς του Η - Μ κύματος στο γυαλί είναι
$\omega^2 = (c^2 / n^2)(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$, όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό και n = 1.52 ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού. Υπολογίστε τη συχνότητα αποκοπής ω_a κάτω από την οποία δεν έχουμε διάδοση οδεύοντος κύματος κατά μήκος του άξονα z. (8)

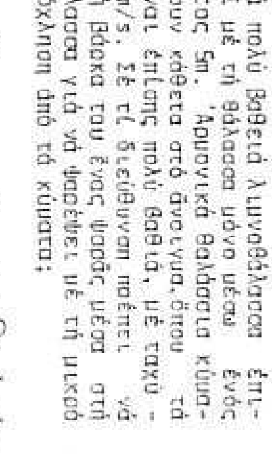
Β) Υπολογίστε την ελάχιστη τιμή της διάστασης a ώστε να έχουμε διάδοση δέσμης laser ερυθρού χρώματος (λ= 800 nm). (4)

Γ) Υπολογίστε τη φασική ταχύτητα v_φ και την ομαδική ταχύτητα v_g και δείξτε ότι $v_\varphi v_g = c^2 / n^2$. (8)

Δ) Ποιος εγκάρσιος τρόπος ταλάντωσης συνδέεται με τη μεγαλύτερη ομαδική ταχύτητα διάδοσης στην ΟΙ ;

5. α) Μέ τό τηλεσκόπιο τοῦ ὄρους Wilson πού ἔχει ἄνοιγμα 2.5m παρατηροῦμε ἕνα μακρινό διπλό ἀστέρα. Ποιά εἶναι ἡ μικρότερη γωνιακή ἀπόσταση τῶν δύο ἀστέρων πού μπορεῖ νά διακριθεῖ ἀπό τό τηλεσκόπιο ὅταν τό μῆκος κύματος τοῦ φωτός πού ἐκπέμπεται εἶναι λ=6000Å;

β) Μιά πολύ βαθειά λιμνοθάλασσα ἐπικοινωνεῖ μέ τή θάλασσα μόνο μέσω ἑνός ἀνοίγματος 5m. Ἁρμονικά θαλάσσια κύματα πέφτουν κάθετα στό ἄνοιγμα, ὅπου τά νερά εἶναι ἐπίσης πολύ βαθειά, μέ ταχύτητα **4** m/s. Σέ τί διεύθυνση πρέπει νά βάλει τή βάρκα του ἕνας ψαράς μέσα στή λιμνοθάλασσα γιά νά ψαρέψει μέ τή μικρότερη ἐνόχληση ἀπό τά κύματα;



Σχέση διασποράς για θαλάσσια βαρυτικά κύματα: $\omega^2 = g/k$

6. **Εικόνα συμβολής** (α) που παίρνουμε σε μεγάλη απόσταση από δύο πανομοιότυπες σημειακές πηγές, που απέχουν απόσταση D και εκπέμπουν ακτινοβολία μήκους κύματος λ, με διαφορά φάσης 90^0, ως συνάρτηση της γωνίας θ (ως προς την μεσοκάθετο στις δύο πηγές). (β) Αν οι δύο πηγές έχουν μηδενική διαφορά φάσης αλλά εκπέμπουν δύο διαφορετικά μήκη κύματος λ_1 και λ_2 η καθεμιά, να βρείτε για ποια τάξη κροσσού του λ_1 έχουμε σύμπτωση του ελαχίστου της έντασης του λ_1 με το μέγιστο του λ_2 . (γ) Για ποια τάξη κροσσού έχουμε διακριτότητα των κροσσών ίση με ½ ;

7. **Συμβολόμετρο Fabry-Perot.** Να βρείτε τη διάμετρο του n-στού κροσσού σε ένα συμβολόμετρο Fabry-Perot που ακολουθείται από φακό εστιακής απόστασης, f , και δέχεται κάθετα στην είσοδο του ένα επίπεδο κύμα μήκους κύματος λ. (Υπόδ.: Βρείτε την έκφραση για την τιμή m_0 του κροσσού μέγιστης τάξης, και δείξτε στη συνέχεια ότι για τον κροσσού της επόμενης p τάξης ικανοποιείται η σχέση
$2d(1- \cos\theta_p)= p\lambda_0)$.

8. (α)Να προσδιορίσετε αν ένα φράγμα διάδοσης με εύρος 1 cm. και συχνοτητα χαραγών 3600 χαρ./mm. έχει την δυνατότητα να αναλύσει μία δυάδα στο φάσμα ενός ατόμου με λ_1=266.4.nm και λ_2= 266.5nm. (β)Αν το εύρος εκάστης σχισμής είναι είναι 92.5 nm. να παραστήσετε γραφικά τη γωνιακή εξάρτηση της περίθλασης από έκαστη σχισμή, και να απαντήσετε κατά πόσο κάποια τάξη του φράγματος είναι ελλείπουσα. Δικαιολογήσατε την απάντησή σας. (γ) Απαντήστε σχετικά με την ελλείπουσα τάξη αν το φράγμα έχει 720 χαρ./mm.