ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΕΣ ΣΕΛΙΔΕΣ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

ἀπό το βιβλίο

ΚΥΜΑΤΙΚΗ, ΚΒΑΝΤΙΚΗ και ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ & ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Σ. Δ. Π. Βλασσόπουλος, Η. Κ. Κατσούφης,

Γ. Τικτόπουλος, Τ. Α. Φίλιππας

Ε. Μ. Π. 1980, 1989

Παράδειγμα ΙΙ-3 Λόγος μαζῶν πυρήνων H καί D

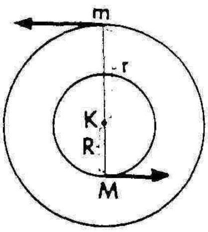
Ὁ Urey ἀνακάλυψε τό 1932 ὅτι στό φάσμα ἐκπομπῆς τοῦ ὑδρογόνου, δίπλα στή γνωστή ἔντονη γραμμή μέ μῆκος κύματος 4861.320 Å, ὑπάρχει καί μιά ἄλλη πολύ ἀμυδρή μέ μῆκος κύματος 4859.975 Å. Ἡ δεύτερη αὐτή γραμμή ἀποδόθηκε στήν ὕπαρξη ἑνός ἰσοτόπου τοῦ ὑδρογόνου, τό δευτέριο, πού ἀπαντᾶται σέ πολύ μικρή ἀφθονία στή φύση. Λάβετε ὑπόψει καί τή κίνηση τοῦ πυρήνα στό ὑπόδειγμα Rutherford-Bohr γιά ἕνα ὑδρογονοειδές ἄτομο καί ὑπολογίστε τό λόγο τῶν μαζῶν τῶν δύο ἰσοτόπων. Συγκρίνετε τό ἀποτέλεσμά σας μέ τό λόγο τῶν μαζῶν πού ὑπολογίζεται ἀπό ἕνα πίνακα.

Λύση

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὁ πυρήνας μέ μάζα M καί τό μοναδικό ἠλεκτρόνιο μέ μάζα m κινοῦνται γύρω ἀπό τό κέντρο μάζας K δια-γράφοντας κυκλικές τροχιές.

Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ K θά ἰσχύει:

$$MR=mr \qquad (1)$$



ὅπου R καί r εἶναι ἀντίστοιχα οἱ ἀποστάσεις τοῦ πυρήνα καί τοῦ ἠλεκτρονίου ἀπό τό K.

Ἄν ω εἶναι ἡ κοινή γωνιακή ταχύτητα περιστροφῆς τότε ἡ ὁλική στροφορμή τοῦ συστήματος ὡς πρός τό K θά εἶναι

$$J_{o\lambda} = mr^2\omega + MR^2\omega$$

Ἐφαρμόζοντας τή συνθήκη κβαντώσεως τοῦ Bohr γιά τήν $J_{o\lambda}$ καί χρησιμοποιώντας τήν (1) ἔχουμε

$$mr^2\omega\left(1+\frac{m}{M}\right)=n\hbar \qquad (2)$$

Τό ἠλεκτρόνιο ἐκτελεῖ κυκλική κίνηση ὑπό τήν ἐπίδραση τῆς δυνάμεως Coulomb πού ἐξασκεῖται ἀπό τόν πυρήνα. Ἡ κεντρομόλος αὐτή δύναμη θά ἰσοῦται μέ

$$m\omega^2 r = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0(r+R)^2} \qquad (3)$$

ὅπου Z ὁ ἀτομικός ἀριθμός τοῦ πυρήνα.
Οἱ (1) καί (3) δίνουν

$$m\omega^2 r^3 = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0\left(1+\frac{m}{M}\right)^2} \qquad (4)$$

Τέλος ἡ ὁλική ἐνέργεια τοῦ συστήματος τό ὁποῖο θεωροῦμε μή σχετικιστικό θά εἶναι

$$E_{o\lambda} = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0(r+R)}$$

ἤ

$$E_{o\lambda} = \frac{1}{2}mr^2\omega^2\left(1+\frac{m}{M}\right) - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r\left(1+\frac{m}{M}\right)} \qquad (5)$$

Λύνοντας τίς (2) καί (4) ὡς πρός r καί ω καί ἀντικαθιστώντας στήν (5) βρίσκουμε

$$E_{\text{ολ}} = -\frac{Z^2\mu}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{1}{n^2}$$

ὅπου τό $\mu=\frac{mM}{m+M}$ λέγεται ἡ ἀνηγμένη μάζα τοῦ συστήματος καί ἀντικαθιστᾶ τό m στόν κατά τά ἄλλα ἀπαράλλακτο τύπο γιά τήν $E_{\text{ολ}}$, πού βρίσκουμε ὅταν ὁ πυρήνας θεωρεῖται ἀκίνητος.

Ἡ συχνότητα τῆς ἀκτινοβολίας πού ἐκπέμπεται κατά τήν ἀποδιέγερση ἀπό τήν στάθμη μέ $n=n_{\text{αρχ}}$ στή στάθμη μέ $n=n_{\text{τελ}}$ δίνεται ἀπό τή σχέση

$$h\nu=\Delta E=\frac{hc}{\lambda}$$

ὁπότε ἡ (6) δίνει:

$$\frac{1}{\lambda}=Z^2R\left(\frac{1}{n^2_{\text{τελ}}}-\frac{1}{n^2_{\text{αρχ}}}\right) \qquad (7)$$

ὅπου R ἡ τροποποιημένη σταθερά Rydberg

$$R=\frac{\mu e^4}{8\varepsilon_0^2h^3c}$$

Ἐπειδή ἡ μάζα τοῦ πυρήνα τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου M_H εἶναι διαφορετική ἀπό ἐκείνη τοῦ δευτερίου M_D γι'αὐτό τά ἀντίστοιχα μ θά διαφέρουν καί ἑπομένως καί τά ἀντίστοιχα λ. Χρησιμοποιώντας τήν (7) δυό φορές μέ τά γνωστά μήκη κύματος $\lambda_H=4861.320$ Å καί $\lambda_D=$ $=4859.975$ Å βρίσκουμε γιά τόν ζητούμενο λόγο:

$$\frac{M_D}{M_H}=\frac{\beta\frac{m}{M_H}}{\beta\left(1+\frac{m}{M_H}\right)-1}=2.034$$

ὅπου $\beta=\frac{\lambda_D}{\lambda_H}$ καί $\frac{m}{M_H}=1/1836$.

Ἀπό πίνακα πυρηνικῶν μαζῶν βρίσκουμε ὅτι $\frac{M_D}{M_H}=1.99907$.

Παράδειγμα ΙΙ-4

Παρατηρητής κοιτάζει φωτεινή πηγή πού βρίσκεται σέ ἀπόσταση 100 m καί ἐκπέμπει φωτεινή ροή 0.01 W. Ὑπολογίστε τόν ἀριθμό τῶν φωτονίων πού μπαίνουν στό μάτι τοῦ παρατηρητῆ ἀνά δευτερόλεπτο. Ὑποθέστε ὅτι ἡ διάμετρος τῆς κόρης τοῦ ματιοῦ εἶναι 4 mm καί ὅτι τό φῶς πού ἐκπέμπεται ἔχει μῆκος κύματος 5600 Å.

τόνιο. ('Υποθέτουμε ὅτι οἱ πυρῆνες τοῦ μετάλλου τῆς ἀνόδου εἶναι τόσο βαρεῖς, ὥστε μένουν ἀκίνητοι κατά τή διάρκεια τῆς παραπάνω διαδικασίας). Μποροῦμε λοιπόν νά γράψουμε, σέ προφανή συμβολισμό:

$$h\nu \leqslant eV \quad \text{ἤ} \quad h\frac{c}{\lambda} \leqslant eV \quad \text{ἤ} \quad \lambda \geqslant 2\pi\frac{\hbar c}{eV} \equiv \lambda_{min},$$

ὁπότε

$$\lambda_{min} = 0.41 \text{ Å}.$$

Παράδειγμα II-6 Ἀνάκρουση κατά τήν ἐκπομπή φωτονίου

Σωματίδιο μέ μάζα M_i διασπᾶται ἐκπέμποντας ἕνα φωτόνιο. Τό σωματίδιο ἀνακρούεται καί ἔχει μάζα M_f μετά τήν ἐκπομπή τοῦ φωτονίου. Τό φωτόνιο πού ἐκπέμπεται ὅταν παρατηρεῖται στό ἀδρανειακό σύστημα ἀναφορᾶς, ὅπου τό σωματίδιο ἦταν ἀρχικά ἀκίνητο, ἔχει συχνότητα ω. Ἄν ω_0 εἶναι ἡ συχνότητα τοῦ φωτονίου στή περίπτωση πού δέν λάβουμε ὑπόψη τήν ἀνάκρουση (δηλ. ἄπειρο M_i),

α) δεῖξτε ὅτι

$$\omega = \frac{(M_i+M_f)}{2M_i}\,\omega_0 = \omega_0\left\{1-\frac{\omega_0\hbar}{2M_i c^2}\right\}$$

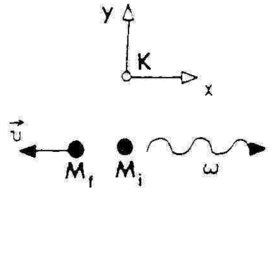
β) Ὑπολογιστε τή σχετική μετατόπιση $(\omega_0-\omega)/\omega$ γιά τήν κίτρινη γραμμή πού ἐκπέμπεται ἀπό τό ἄτομο νατρίου. Ὑπολογίστε ἐπίσης τό $(\omega_0-\omega)/\omega$ γιά τήν ἀκτινοβολία γ μέ ἐνέργεια 113 keV πού ἐκπέμπεται ἀπό τό ἰσότοπο τοῦ ἀφνίου $_{72}Hf^{177}$.

Λύση

α) Στό σύστημα K ὅπου ἀρχικά ἠρεμεῖ τό σωματίδιο, ἡ διατήρηση τῆς ὁλικῆς ἐνέργειας καί τῆς ὁλικῆς ὁρμῆς δίνουν:

$$M_i c^2 = \gamma M_f c^2 + \hbar\omega, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad (1)$$

$$0 = \frac{\hbar\omega}{c}\,\hat{x} - \gamma M_f \vec{\upsilon}, \qquad (2)$$



ὅπου $\hat{x}$ τό μοναδιαῖο διάνυσμα κατά τή διεύθυνση τοῦ ἄξονα τῶν x πού δεχόμαστε ὅτι συμπίπτει μέ τήν διεύθυνση κινήσεως τοῦ φωτονίου (χωρίς περιορισμό τῆς γενικότητας).

Ὑψώνουμε τήν (1) στό τετράγωνο καί παίρνουμε

$$M_i^2 c^4 + \hbar^2\omega^2 - 2M_i c^2\hbar\omega = \gamma^2 M_f^2 c^4$$

'Αντικαθιστώντας σ'αὐτή τό $\hbar^2\omega^2$ ἀπό τήν (2) ἔχουμε

$$M_i^2c^4+\gamma^2M_f^2\upsilon^2c^2-\gamma^2M_f^2c^4=2M_i c^2\hbar\omega$$

ἤ

$$M_i^2c^4-\gamma^2M_f^2c^4\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)=2M_i c^2\hbar\omega$$

ἤ ἐπειδή $\gamma^2=\dfrac{1}{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}$, βρίσκουμε ὅτι

$$(M_i^2-M_f^2)c^2=2M_i\hbar\omega.$$

Ἄν δέν εἴχαμε ἀνάκρουση, ἡ συχνότητα ω_0 τοῦ ἐκπεμπομένου φωτονίου θά ἦταν

$$\omega_0=\frac{(M_i-M_f)c^2}{\hbar}. \tag{3}$$

Ἄρα ὅταν ἔχουμε ἀνάκρουση, βρίσκουμε στό σύστημα K

$$\omega=\frac{(M_i+M_f)\omega_0}{2M_i} \tag{4}$$

'Από τήν (3) ἔχουμε τώρα

$$M_f=M_i-\frac{\omega_0\hbar}{c^2}$$

ὁπότε ἀντικαθιστώντας στήν (4) παίρνουμε

$$\omega=\omega_0\left[1-\frac{\omega_0\hbar}{2M_i c^2}\right] \tag{5}$$

β) Ν ά τ ρ ι ο: 'Από τόν πίνακα ἀτομικῶν βαρῶν βρίσκουμε

$$M_i=22.99 \text{ amu}$$

'Από τήν (5) παίρνουμε

$$\frac{\omega_0-\omega}{\omega}\simeq\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0}=\frac{\hbar\omega_0}{2M_i c^2}$$

'Αφοῦ 1 amu $\times c^2=9.31\times10^9$ eV καί φωτόνιο μέ ἐνέργεια 1 eV ἔχει μῆκος κύματος 12938 Å καί τό μέσο μῆκος κύματος γιά τή διπλῆ κίτρινη γραμμή τοῦ Na εἶναι 5893 Å, προκύπτει ὅτι

$$\frac{\omega_0-\omega}{\omega}\simeq5.13\times10^{-11}$$

Ἄ φ ν ι ο: Γιά τόν πυρήνα $_{72}Hf^{177}$ ἔχουμε:

$$M_i=178.49 \text{ amu}$$

καί $\hbar\omega_2 \simeq 113$ keV, ὁπότε βρίσκουμε ὅτι:

$$\frac{\omega_2-\omega}{\omega} \simeq 3.40 \times 10^{-7}$$

δηλ. πολύ μεγαλύτερο ἀπ'ὅτι στήν προηγούμενη περίπτωση τοῦ ὀπτικοῦ φωτονίου.

Παράδειγμα ΙΙ-7 Ἐξαΰλωση ζεύγους ἠλεκτρονίου-ποζιτρονίου

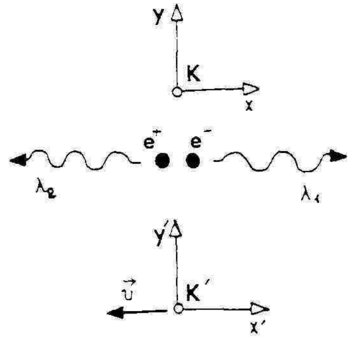
Ζεῦγος ἠλεκτρονίου - ποζιτρονίου πού ἀρχικά ἠρεμοῦν στό σύστημα ἀναφορᾶς Κ, ἐξαϋλώνονται σέ δύο φωτόνια πού κινοῦνται κατά μῆκος τοῦ ἄξονα τῶν x. Θεωροῦμε καί ἕνα ἄλλο σύστημα ἀναφορᾶς Κ' πού κινεῖται ὡς πρός τό Κ μέ ταχύτητα $\vec{u}$ πρός τά ἀριστερά στό σχῆμα, κατά μῆκος τοῦ ἄξονα τῶν x. Νά βρεθεῖ τό μῆκος κύματος λ τῶν φωτονίων πού βλέπει παρατηρητής ἀκίνητος α) στό σύστημα Κ καί β) στό σύστημα Κ'.

Λύση

α) Ἄν $\vec{p}_1$ καί $\vec{p}_2$ εἶναι οἱ ὁρμές τῶν δύο φωτονίων, τότε ἀπό τήν ἀρχή διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς

$$\vec{p}_1+\vec{p}_2=0 \qquad (1)$$

προκύπτει ὅτι $p_1=p_2$ καί ὅτι τά δύο φωτόνια κινοῦνται πρός ἀντίθετες κατευθύνσεις. Ἐπειδή γενικά $p=\frac{h}{\lambda}$, προκύπτει ὅτι $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$.



Ἡ ἀρχή διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας δίνει

$$2mc^2=h\nu_1+h\nu_2$$

Ἔτσι, εὔκολα προκύπτει ὅτι τό μῆκος κύματος τῶν δύο φωτονίων εἶναι

$$\lambda=\frac{h}{mc}$$

ἴσο δηλ. μέ τό μῆκος κύματος Compton τοῦ ἠλεκτρονίου.

β) Ἡ ἀρχή διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς στό σύστημα Κ' δίνει

$$2\gamma m\vec{u}=\vec{p}\,'_1+\vec{p}\,'_2\,, \qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad (3)$$

ἤ

$$2\gamma mu=p'_1-p'_2$$

γιατί καί τά δύο ἠλεκτρόνια φαίνονται ἀπό τό Κ' ὅτι κινοῦνται μέ

ταχύτητα υ κατά τήν θετική φορά τοῦ ἄξονα τῶν x πρίν ἀπό τήν ἐξαύλωση.
Ἡ ἀρχή διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας δίνει

$$2\gamma mc^2=p_1'c+p_2'c \qquad (4)$$

Πολλαπλασιάζοντας τήν (3) μέ c καί προσθέτοντάς την στήν (4) παίρνουμε

$$p_1'=\gamma m(c+u)=mc\sqrt{\frac{c+u}{c-u}}$$

ἤ

$$\lambda_1'=\frac{h}{hc}\sqrt{\frac{c-u}{c+u}}=\lambda\sqrt{\frac{c-u}{c+u}}<\lambda$$

Ὅμοια παίρνουμε

$$\lambda_2'=\lambda\sqrt{\frac{c+u}{c-u}}>\lambda$$

βρίσκουμε δηλαδή τή σχέση Doppler γιά ἠλεκτρομαγνητικά κύματα.

Παράδειγμα ΙΙ-8 «Βαρυντική μάζα» φωτονίου

Ἡ γενική θεωρία τῆς σχετικότητας προβλέπει, καί ἔχει ἀποδειχθεῖ πειραματικά, ὅτι τό φῶς ἐπηρεάζεται ἀπό τό πεδίο βαρύτητας. Μποροῦμε λοιπόν νά ὑποθέσουμε ὅτι τά φωτόνια ἔχουν βαρυντική μάζα. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ "μάζα" ἑνός φωτονίου μέ συχνότητα ν καί ἡ μεταβολή τῆς ἐνέργειάς του ὅταν αὐτό "πέσει" στό πεδίο βαρύτητας κοντά στήν ἐπιφάνεια τῆς γῆς κατά ἕνα ὕψος H.

Λύση

Ἡ ἐνέργεια E ἑνός φωτονίου μέ συχνότητα ν ἰσοῦται πρός $E=h\nu$. Ἀπό τή θεωρία τῆς εἰδικῆς σχετικότητας γνωρίζουμε ὅτι ἡ ἀδρανειακή μάζα m συνδέεται μέ τήν ἐνέργεια μέ τή σχέση

$$E=mc^2$$

Ἐπομένως ἡ ἀδρανειακή μάζα m τοῦ φωτονίου θά δίνεται ἀπό τή σχέση

$$m=h\nu/c^2.$$

Ἐξαιτίας τοῦ πεδίου βαρύτητας τῆς γῆς θά ἐξασκεῖται λοιπόν στό φωτόνιο μιά δύναμη

$$B=m\,g=gh\nu/c^2$$

Ὅταν τό φωτόνιο πέσει κατά ἕνα ὕψος H στό πεδίο βαρύτητας θά κερδίσει ἐνέργεια ἴση μέ

$$BH=gHh\nu/c^2 \quad \text{ἤ} \quad \Delta E=gHh\nu/c^2$$

Ἡ ἀντίστοιχη μεταβολή στή συχνότητά του θά εἶναι

$$\Delta\nu=\frac{\Delta E}{h}=gH\nu/c^2$$

καί ἡ σχετική μεταβολή

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}=\frac{\Delta E}{E}=\frac{gH}{c^2}$$

Ἀριθμητικό παράδειγμα

$$H=100\ \text{m} \qquad g\simeq 10\ \text{ms}^{-2}$$

$$c=3\times 10^{8}\text{ms}^{-1}$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}=\frac{1000}{9\times 10^{16}}\approx 10^{-14}$$

Σημείωση

Ἀλλαγές στή συχνότητα φωτονίων, μέσα στό πεδίο βαρύτητας, ἔχουν πράγματι παρατηρηθεῖ πειραματικά μέ χρήση τοῦ φαινομένου Mössbauer.

Παράδειγμα ΙΙ-9 Ἐνέργεια τοῦ ἠλεκτρονίου στό φαινόμενο Compton

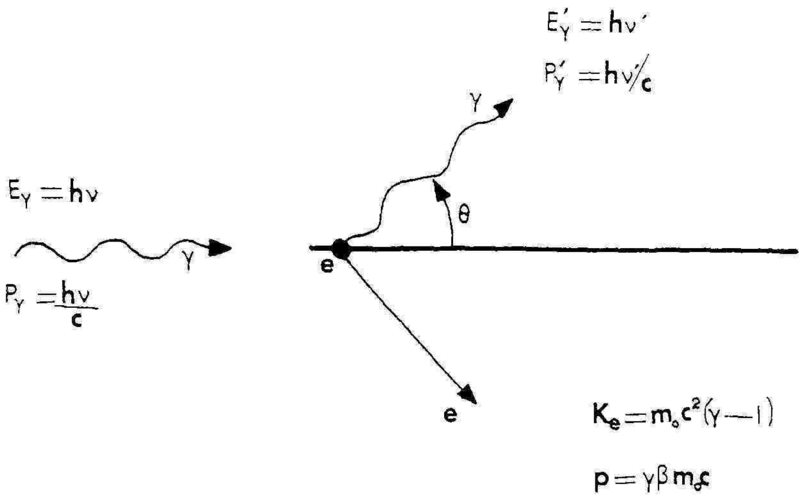
α) Ἄν θ καί φ εἶναι οἱ γωνίες πού σχηματίζουν ἡ σκεδαζόμενη ἀκτίνα γ καί τό ἀνακρουόμενο ἠλεκτρόνιο ἀντιστοίχως μέ τή διεύθυνση τῆς ἀρχικῆς πορείας τῆς ἀκτίνας γ κατά τή σκέδαση Compton, νά βρεθεῖ ἡ σχέση πού συνδέει τίς γωνίες θ καί φ.

β) Ποιά εἶναι ἡ μέγιστη καί ποιά ἡ ἐλάχιστη τιμή τῆς γωνίας φ;

γ) Ποιά εἶναι ἡ ἐνέργεια τοῦ ἠλεκτρονίου ὅταν $\varphi=\varphi_{max}$;

Λύση

α) Τή σκέδαση Compton παριστάνουμε μέ τό ἑπόμενο σχῆμα.



Τά διάφορα σύμβολα ἔχουν τίς παρακάτω σημασίες:

ν : Συχνότητα προσπίπτοντος φωτονίου

ν': Συχνότητα σκεδαζόμενου φωτονίου

E_γ, E'_γ: Ἐνέργεια προσπίπτοντος καί σκεδαζόμενου φωτονίου

P_γ, P'_γ: Ὁρμή προσπίπτοντος καί σκεδαζόμενου φωτονίου

K_e, p: Κινητική ἐνέργεια καί ὁρμή ἀνακρουόμενου ἠλεκτρονίου

m_0: μάζα ἠρεμίας ἠλεκτρονίου

$\beta = \frac{\upsilon}{c}$, υ: ταχύτητα ἠλεκτρονίου $\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$

Ἡ ἀρχή διατήρησης ἐνέργειας γράφεται

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + \gamma\, m_0c^2 \tag{1}$$

Ἡ ἀρχή διατήρησης ὁρμῆς μᾶς δίνει

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + \gamma\beta\, m_0 c\cos\varphi \tag{2}$$

$$0 = \frac{h\nu'}{c}\sin\theta - \gamma\beta\, m_0 c\sin\varphi \tag{3}$$

Ἀπό τίς (2) καί (3) ἀφοῦ τίς ὑψώσουμε στό τετράγωνο καί τίς προσθέσουμε κατάλληλα παίρνουμε

$$\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - \frac{2h^2}{c^2}\nu\nu'\cos\theta = \beta^2\gamma^2 m_0^2 c^2$$

ἤ

$$(h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h^2\nu\nu'\cos\theta = \beta^2\gamma^2 m_0^2 c^4 \tag{4}$$

'Από τήν (1) όμως έχουμε

$$(\gamma-1)^2 m_0^2 c^4 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h^2\nu\nu' \qquad (5)$$

'Από τίς (4) καί (5) παίρνουμε

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1+\alpha(1-\cos\theta)} \qquad (6)$$

όπου $\alpha = \dfrac{h\nu}{m_0 c^2}$

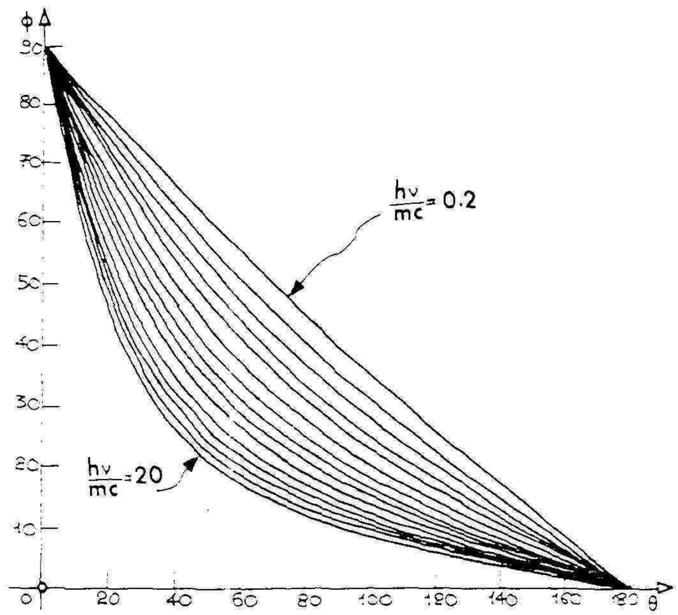
'Από τίς (2) καί (3) έχουμε ακόμα ότι

$$\cot\varphi = \frac{h\nu - h\nu'\cos\theta}{h\nu'\sin\theta}$$

'Αντικαθιστοῦμε ἀπό τήν (6) τό hν' καί βρίσκουμε

$$\cot\varphi = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\ (1+\alpha) = (1+\alpha)\tan\frac{\theta}{2}$$

'Η μεταβολή τῆς φ μέ τή θ φαίνεται στό παρακάτω σχῆμα.



β) 'Η μέγιστη γωνία φ ἀντιστοιχεῖ στήν ἐλάχιστη γωνία θ. 'Επομένως

$\varphi_{max} = \dfrac{\pi}{2}$ γιά $\theta = 0$

$\varphi_{min} = 0$ γιά $\theta = \pi$

γ) Γιά $\varphi = \varphi_{max} = \dfrac{\pi}{2}$ καί $\theta = 0$ ή ἐξίσωση (4) γράφεται

$$\gamma\beta m_0 c=0.$$

Έπεται ότι $\beta=0$ καί $\gamma=1$ δηλαδή ή κινητική ένέργεια τοῦ ήλεκτρονίου εἶναι μηδέν.

Παράδειγμα ΙΙ-10 Ακτινοβολία Cerenkov

Ἡ σχέση $p=h/\lambda$ μεταξύ τῆς ὁρμῆς p ἑνός φωτονίου καί τοῦ μήκους κύματος λ ἰσχύει καί μέσα σ'ένα διηλεκτρικό μέσο μέ δείκτη διάθλασης n ὑπό τή μορφή $p=h/\lambda'$, ὅπου $\lambda'=\lambda/n$.

Δεῖξτε ὅτι μόνον ἄν ἡ ταχύτητα u ἑνός ἡλεκτρονίου μέσα στό διηλεκτρικό εἶναι μεγαλύτερη ἀπό c/n δηλ. ἀπό τή φασική ταχύτητα τοῦ φωτός στό μέσο αὐτό, μπορεῖ τό ἡλεκτρόνιο νά ἀκτινοβολήσει ἕνα φωτόνιο κατά τήν διαδικασία (ἀκτινοβολία Cerenkov):

$$e \longrightarrow e+\gamma$$

Ὑπόδειξη: Χρησιμοποιεῖστε τή διατήρηση τῆς ὁλικῆς ὁρμῆς καί ἐνέργειας κατά τήν ἀντίδραση $e \longrightarrow e+\gamma$.

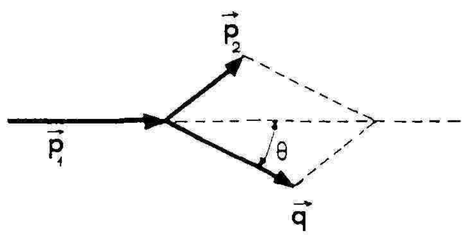
Λύση

Ἔστω $\vec{p}_1$ καί $\vec{p}_2$ ἡ ἀρχική καί ἡ τελική ὁρμή τοῦ ἠλεκτρονίου καί $\vec{q}$ ἡ ὁρμή τοῦ ἐκπεμπομένου φωτονίου (βλέπε σχῆμα).

Οἱ σχέσεις πού ἐκφράζουν τή διατήρηση τῆς ὁρμῆς καί τῆς ἐνέργειας κατά τήν ἀκτινοβολία $e \longrightarrow e+\gamma$ εἶναι

$$\vec{p}_1=\vec{p}_2+\vec{q} \qquad (1)$$

$$\sqrt{m^2c^4+p_1^2c^2}=\sqrt{m^2c^4+p_2^2c^2}+qc/n \qquad (2)$$



Στήν ἐξ. (2) ὁ ὅρος qc/n εἶναι ἡ ἐνέργεια τοῦ φωτονίου. Πραγματικά οἱ σχέσεις $q=h/\lambda'=hn/\lambda$ καί $E=h\nu=hc/\lambda$ δίνουν $E=qc/n$.

Ὑψώνοντας τήν (2) στό τετράγωνο, ἀντικαθιστῶντας $\vec{p}_2=\vec{p}_1-\vec{q}$, καί λύνοντας ὡς πρός τό συνημίτονο τῆς γωνίας θ, μεταξύ $\vec{p}_1$ καί $\vec{q}$ ἔχουμε:

$$\cos\theta=\frac{q}{2p_1}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{n}\sqrt{1+\left(\frac{mc}{p_1}\right)^2} \qquad (3)$$

Γιά νά εἶναι δυνατή ἡ διαδικασία $e \longrightarrow e+\gamma$, πρέπει τό δεξιό μέλος τῆς (3) νά γίνεται μικρότερο τῆς μονάδας γιά κάποια τιμή τοῦ q. Ἀρκεῖ λοιπόν (ὑποθέτουμε n > 1) νά ἔχουμε

$$\frac{1}{n}\sqrt{1+\left(\frac{mc}{p_1}\right)^2} \leqslant 1$$

Ἀπό τήν παραπάνω ἀνισότητα ἔχουμε ἕνα κάτω φράγμα γιά τήν ἀρχική ταχύτητα υ τοῦ ἠλεκτρονίου:

$$\upsilon = \frac{p_1 c}{\sqrt{p_1^2 c^2 + m^2 c^4}} \geqslant \frac{c}{n}$$

Ἄρα τό φαινόμενο αὐτό μπορεῖ νά συμβεῖ μόνο ὅταν ἡ ταχύτητα τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τή φασική ταχύτητα τοῦ φωτός στό διηλεκτρικό.

Σημ. Παρόμοια συμπεράσματα προκύπτουν καί μέ βάση τήν κλασική ἠλεκτρομαγνητική θεωρία.

Παράδειγμα II-11 Ὁμαδική ταχύτητα κύματος de Broglie

Δεῖξτε ὅτι ἡ ταχύτητα υ ὁποιουδήποτε ἐλεύθερου σωματιδίου μέ μάζα m συμπίπτει μέ τήν ὁμαδική ταχύτητα τοῦ ἀντίστοιχου κύματος de Broglie. Δεῖξτε ἐπίσης ὅτι ἡ φασική ταχύτητα τοῦ κύματος αὐτοῦ εἶναι μεγαλύτερη ἀπό c.

Λύση

Ἡ ἐνέργεια E τοῦ σωματιδίου εἶναι

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (cp)^2} = \hbar\omega \tag{1}$$

ὅπου p ἡ ὁρμή τοῦ σωματιδίου καί ω ἡ συχνότητα τοῦ ἀντιστοίχου κύματος. Ἀλλά

$$p = \hbar k$$

ὅπου k τό μέτρο τοῦ κυματικοῦ διανύσματος τοῦ ἀντίστοιχου κύματος· ἄρα θά ἔχουμε ὅτι

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2 + c^2 k^2} \tag{2}$$

Αὐτή εἶναι ἡ σχέση διασπορᾶς τοῦ κύματος πού ἀντιστοιχεῖ στό κινούμενο σωματίδιο.

Ἡ ὁμαδική ταχύτητα τοῦ κύματος αὐτοῦ εἶναι

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2 \hbar k}{E} = \frac{c^2 p}{E}$$

'Αλλά $p=\gamma m\upsilon$ καί $E=\gamma mc^2$, ὅπου $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$, ὁπότε ἰσχύει

$$\upsilon_g=\upsilon$$

'Η φασική ταχύτητα τοῦ κύματος de Broglie εἶναι

$$\upsilon_\phi=\frac{\omega}{k}=\frac{\sqrt{\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2+c^2k^2}}{k}=\sqrt{\left(\frac{mc^2}{p}\right)^2+c^2}$$

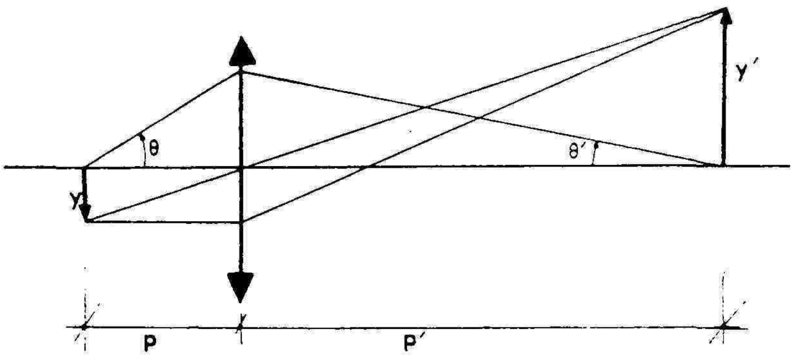
πού εἶναι προφανῶς μεγαλύτερη τῆς c γιά σωματίδια μέ μάζα m.

Παράδειγμα ΙΙ-12 Διακριτική ἱκανότητα ἠλεκτρονικοῦ μικροσκοπίου

α) Τό ἀριθμητικό ἄνοιγμα τοῦ ἀντικειμενικοῦ συστήματος ἑνός ἠλεκτρονικοῦ μικροσκοπίου εἶναι 5×10^{-3} rad. Ποιά θά πρέπει νά εἶναι ἡ ἐλάχιστη κινητική ἐνέργεια E τῶν ἠλεκτρονίων ὥστε νά μπορεῖ τό μικροσκόπιο νά διακρίνει ἀντικείμενα διαστάσεων d=0.1 Å; (Σημείωση: Τό ἀριθμητικό ἄνοιγμα ἑνός ὀπτικοῦ συστήματος εἶναι τό γινόμενο τοῦ δείκτη διάθλασης n τοῦ φακοῦ εἰσόδου, ἐπί τό ἡμίτονο τῆς γωνίας τοῦ κώνου πού ἔχει κορυφή ἕνα σημεῖο τοῦ ἀντικειμένου καί βάση τήν περιφέρεια τοῦ φακοῦ).

β) Ποιά πρέπει νά εἶναι ἡ ἀντίστοιχη ἐνέργεια τῶν φωτονίων ὥστε ἕνα ὀπτικό μικροσκόπιο μέ ἀριθμητικό ἄνοιγμα ἴσο μέ 1.45 νά ἔχει τήν ἴδια διακριτική ἱκανότητα;

Λύση



α) 'Η διακριτική ἱκανότητα ἑνός φακοῦ σύμφωνα μέ τό κριτήριο τοῦ Rayleigh δίνεται ἀπό τή σχέση

$$R=1.22\frac{\lambda}{D}$$

ὅπου λ τό μῆκος κύματος καί D ἡ διάμετρος τοῦ φακοῦ.

Γιά συνηθισμένο φακό ἔχουμε

$$ny\sin\theta=y'\sin\theta'$$

ὅπου n ὁ δείκτης διάθλασης τοῦ φακοῦ, y τό μέγεθος τοῦ ἀντικειματος de Broglie πού ἀντιστοιχεῖ στά ἠλεκτρόνιά της νά εἶναι πολύ μικρότερο ἀπό τή χαρακτηριστική γεωμετρική διάσταση τοῦ προβλήματος, δηλ. τή σταθερά πλέγματος (πρβλ. μέ τό ὅριο ἰσχύος τῆς γεωμετρικῆς ὀπτικῆς γιά ἠλεκτρομαγνητικά κύματα). Ἐπομένως, ἄν p εἶναι ἡ ὁρμή καθενός ἠλεκτρονίου τῆς δέσμης, θά πρέπει

$$\frac{h}{p} = \lambda << a \quad \text{ἤ} \quad pc >> 2\pi\hbar c/a \equiv p_0 c \approx 5 \text{ keV}.$$

Ἀφοῦ στό ὅριο $p = p_0$ ἔχουμε

$$p_0 c \approx 5 \text{ keV} << m_e c^2 \approx 500 \text{ keV},$$

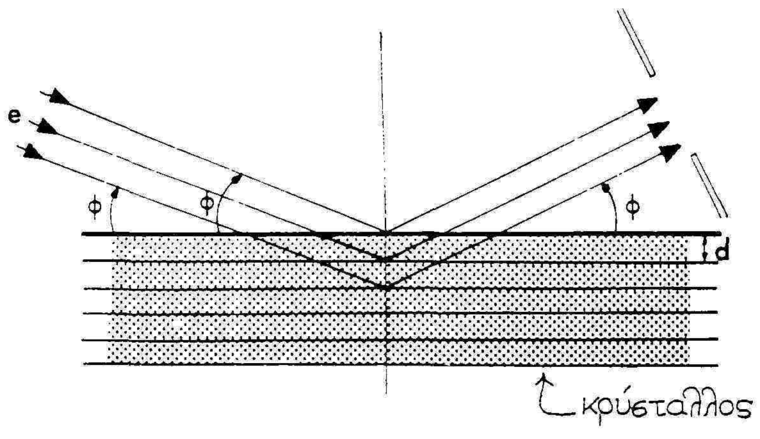
γιά τήν εὕρεση αὐτοῦ τοῦ ὁρίου ἀρκεῖ ἡ χρήση τῆς μή σχετικιστικῆς μηχανικῆς. Ἐπομένως,

$$eV = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{(pc)^2}{2m_e c^2} >> \frac{25}{1000} \text{keV},$$

ὁπότε $V >> 25$ Volt ἤ π.χ. $V > 250$ Volt.

Παράδειγμα II-14

Δέσμη ἠλεκτρονίων μέ κινητική ἐνέργεια E_κ πέφτει στήν ἐπίπεδη ἐπιφάνεια κρυστάλλου ὑπό γωνία $\varphi = 30°$. Οἱ ἀποστάσεις μεταξύ διαδοχικῶν ἐπιπέδων τοῦ κρυσταλλικοῦ πλέγματος εἶναι $d = 5 \times 10^{-4}$ m. Μετά τή σκέδασή τους ἀπό τόν κρύσταλλο τά ἠλεκτρόνια περνοῦν ἀπό σχισμή, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα. Γιά ποιές τιμές τῆς ἐνέργειας E_κ ἔχει μέγιστα ὁ ἀριθμός τῶν ἠλεκτρονίων πού περνοῦν ἀπό τή σχισμή ἀνά μονάδα χρόνου;



Λύση

Τό μῆκος κύματος λ τῶν ἠλεκτρονίων μέ ὁρμή p δίνεται ἀπό τή σχέση

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Ἡ ὁρμή τῶν ἠλεκτρονίων ὑπολογίζεται ἀπό τή σχέση

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 = (E_\kappa + mc^2)^2$$

δηλαδή

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E_\kappa(E_\kappa + 2mc^2)}$$

Ἐπομένως

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{E_\kappa(E_\kappa + 2mc^2)}}$$

Ἡ σκέδαση τῶν ἠλεκτρονίων διέπεται ἀπό τό νόμο τοῦ Bragg, παρουσιάζονται δηλαδή μέγιστα στήν σκεδαζόμενη δέσμη ὅταν

$$n\lambda = 2d\sin\varphi$$

ὅπου $n=1,2,...$

Ἀπό τή συνθήκη αὐτή προκύπτει ὅτι

$$\frac{nhc}{\sqrt{E_\kappa(E_\kappa + 2mc^2)}} = 2d\sin\varphi$$

ἤ

$$E_\kappa = \sqrt{m^2c^4 + \left(\frac{nhc}{2d\sin\varphi}\right)^2} - mc^2$$

Ἔχουμε

$$mc^2 = 0.511\ \text{MeV} \quad \text{καί} \quad hc = 1.24\times10^{-12}\ \text{MeVm}$$

Ἀντικαθιστοῦμε τό $\sin\varphi$ μέ τήν τιμή τοῦ 1/2 καί παίρνουμε τίς ζητούμενες ἐνέργειες βάζοντας $n=1,2,3,...$

$n=1$	$E_\kappa = 601.4$ eV
$n=2$	$E_\kappa = 2401.6$ eV
$n=3$	$E_\kappa = 5387.8$ eV
$n=4$	$E_\kappa = 9539.8$ eV κτλ.

Παράδειγμα ΙΙ-15

Ἡ μορφή τοῦ κυματοπακέτου ἑνός ἐλεύθερου σωματιδίου μέ μάζα m, πού διαδίδεται κατά τή διεύθυνση x, δίνεται ἀπό τήν κυματική συνάρτηση

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} a(k)e^{i(kx-\omega t)}$$

Δηλαδή τό κυματοπακέτο εἶναι ὑπέρθεση ἐπίπεδων κυμάτων τῆς μορφῆς $e^{i(kx-\omega t)}$. Ἄν ἡ $\psi(x,t)$ ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση Schrödinger γιά τυχόντα $a(k)$ νά βρεθεῖ ἡ σχέση διασπορᾶς αὐτῶν τῶν κυμάτων καί ἀπό αὐτή ἡ σχέση πού συνδέει τήν ταχύτητα φάσης υ_ϕ μέ τήν ταχύτητα ὁμάδας υ_g τοῦ κυματοπακέτου.

β) Ἀπό τήν ἀνισότητα $\upsilon_g \neq \upsilon_\phi$ προκύπτει ὅτι τό κυματοπακέτο παθαίνει διασπορά καθώς διαδίδεται στόν ἐλεύθερο χῶρο. Τό φῶς ὅμως δέν παθαίνει διασπορά στό κενό. Πῶς συμβιβάζεται αὐτό μέ τό γεγονός ὅτι τό φῶς ἀποτελεῖται ἀπό ἐλεύθερα φωτόνια;

Λύση

α) Γιά ἕνα ἐλεύθερο σωματίδιο ἡ ἐξίσωση Schrödinger γράφεται

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}=i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$$

Ἀφοῦ ἡ ἐξίσωση αὐτή ἐπαληθεύεται ἀπό τήν $\psi(x,t)$ πού εἶναι ἐπαλληλία ἐπίπεδων κυμάτων μέ αὐθαίρετο πλάτος $a(k)$, θά πρέπει νά ἐπαληθεύεται γιά ὁποιοδήποτε κύμα τῆς μορφῆς

$$\varphi(x,t)=e^{i(kx-\omega t)}$$

Μέ ἀντικατάσταση στήν ἐξίσωση Scrödinger βρίσκουμε τή σχέση διασπορᾶς

$$\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\hbar\omega \qquad \text{ἤ} \qquad \omega=\frac{\hbar k^2}{2m}=\frac{E}{\hbar} \tag{1}$$

ὅπου E ἡ ἐνέργεια τοῦ σωματιδίου.

Ἡ ταχύτητα φάσης εἶναι

$$\upsilon_\phi=\frac{\omega}{k}=\frac{\hbar k}{2m}$$

καί ἡ ταχύτητα ὁμάδας

$$\upsilon_g=\frac{d\omega}{dh}=\frac{\hbar k}{m}$$

Ἐπομένως ἡ σχέση πού συνδέει τίς δύο ταχύτητες εἶναι

$$\upsilon_\phi=\frac{1}{2}\upsilon_g$$

β) Ἐπειδή ἡ μάζα ἠρεμίας τῶν φωνονίων εἶναι μηδέν, ἡ σχέση μεταξύ ὁρμῆς p καί ὁλικῆς ἐνέργειας E δίνεται ἀπό τή σχέση

$$E=cp$$

Ἔχουμε ὅμως ὅτι $E=\hbar\omega$ καί $p=\hbar k$ ὁπότε γιά τά φωτόνια ἡ σχέση διασπορᾶς εἶναι ἡ

$$\omega = ck$$

ὅπου c ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός.

Συμπεραίνουμε ὅτι

$$\upsilon_g = \upsilon_\phi = c$$

καί γι'αὐτό τά φωτόνια δέν παθαίνουν διασπορά.

Παράδειγμα II-16

Χρησιμοποιώντας τήν ἀρχή τῆς ἀβεβαιότητας ἐκτιμῆστε (σέ eV) τήν τάξη μεγέθους τοῦ ἐλάχιστου βάθους V_0 πού θά πρέπει νά ἔχει ἕνα πηγάδι δυναμικοῦ μέ πλάτος $L=1Å$ ὥστε νά κρατάει δέσμιο α) ἕνα ἠλεκτρόνιο καί β) ἕνα πρωτόνιο.

Λύση

Ἡ ἀβεβαιότητα στή θέση εἶναι

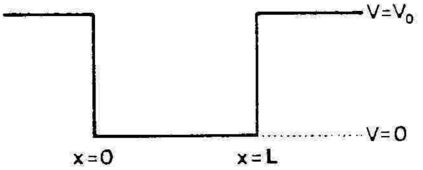
$$\Delta x = L$$

καί στήν ὁλική ἐνέργεια $\Delta E = \frac{(\Delta p)^2}{2m}$

ἀφοῦ $V=0$ ὅταν $0 < x < L$.

Ἄρα, ἐπειδή $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$, θά ἔχουμε:

$$\Delta E \geqslant \frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2} = \frac{\hbar^2}{2mL^2}$$



Τό ἐλάχιστο βάθος δυναμικοῦ ἐπομένως θά εἶναι

$$V_0 = \frac{\hbar^2}{2mL^2}$$

Ἀντικαθιστώντας τίς ἀριθμητικές τιμές, βρίσκουμε ἀντίστοιχα:

α) $$V_0 = \frac{1.05^2 \times 10^{-68}\ J^2 s^2}{2 \times 9.11 \times 10^{-31}\ kg \times 10^{-20}\ m^2} = 6.05 \times 10^{-19}\ J \sim 4\ eV$$

β) $$V_0 = \frac{1.05^2 \times 10^{-68}}{2 \times 1.67 \times 10^{-27} \times 10^{-20}}\ J = 3.30 \times 10^{-22}\ J \simeq 2 \times 10^{-3}\ eV.$$

Δηλαδή τό ἐλάχιστο βάθος δυναμικοῦ πού χρειάζεται γιά τό πρωτόνιο, εἶναι πολύ μικρότερο ἀπό αὐτό πού χρειάζεται γιά τό ἠλεκτρόνιο.

Παράδειγμα ΙΙ-17

Γιά νά δοῦμε ἕνα ἀντικείμενο πρέπει νά τό φωτίσουμε μέ φῶς πού τό μῆκος κύματός του νά εἶναι μικρό σέ σχέση μέ τίς διαστάσεις τοῦ ἀντικειμένου. Γιά νά "δοῦμε" (στήν προκειμένη περίπτωση νά μετρήσουμε) π.χ. τίς ἀποστάσεις τῶν ἀτόμων ἤ μορίων σέ ἕνα κρύσταλλο πρέπει νά χρησιμοποιήσουμε ἀκτῖνες Χ μέ μῆκος κύματος τάξεως 10^{-10} m. Γιά νά μετρήσουμε τίς διαστάσεις τῶν πυρήνων πού εἶναι τῆς τάξης 10^{-15} m, χρησιμοποιοῦμε μιά δέσμη πρωτονίων πού σκεδάζεται ἀπό τούς πυρῆνες. Ποιά εἶναι ἡ ἐλάχιστη ἐνέργεια τῶν πρωτονίων τῆς δέσμης πού πρέπει νά χρησιμοποιηθεῖ;

Λύση

Ἡ ἐνέργεια τῶν πρωτονίων τῆς δέσμης πρέπει νά εἶναι τέτοια ὥστε τό μῆκος κύματός τους κατά de Broglie νά ἔχει τήν τάξη μεγέθους τῶν πυρήνων.

$$\lambda = \frac{h}{p} \approx 10^{-15}\ \mathrm{m}$$

ὅπου p ἡ ὁρμή τοῦ πρωτονίου.

Ἡ κινητική ἐνέργεια τοῦ πρωτονίου δίνεται ἀπό τή σχέση

$$T=\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}-mc^2$$

ὅπου m ἡ μάζα τοῦ πρωτονίου.

Κάνουμε τήν ἀντικατάσταση

$$p=\frac{h}{\lambda}$$

καί βρίσκουμε

$$T=\sqrt{m^2c^4+h^2c^2/\lambda^2}-mc^2$$

Ἔχουμε ὅμως

$$mc^2=932.8\ \mathrm{MeV}$$

$$hc=1.24\times10^{-12}\ \mathrm{MeVm}$$

καί $\lambda_p\approx10^{-15}\ \mathrm{m}$

Βρίσκουμε τελικά

$$T\approx 620\ \mathrm{MeV}.$$

Παράδειγμα ΙΙ-18

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι μποροῦμε νά δοῦμε μέ ἕνα μικροσκόπιο τά σωματίδια τῆς σκόνης πού αἰωροῦνται σέ ἕνα δωμάτιο. Τό μικροσκόπιο αὐτό δέν μπορεῖ νά διακρίνει ἀντικείμενα μέ διάμετρο μικρότερη ἀπό d=0,1 μm. Ἡ πυκνότητα τῶν σωματιδίων τῆς σκόνης εἶναι $\rho=2gr\ cm^{-3}$ καί ἡ ἀβεβαιότητα μέ τήν όποία μπορεῖ νά καθορισθεῖ ἡ θέση ένός σωματιδίου εἶναι $\Delta x=d/100$. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ μεγαλύτερη ἀκρίβεια μέ τήν όποία μπορεῖ νά μετρηθεῖ ἡ ταχύτητά τῶν σωματιδίων τῆς σκόνης πού μόλις διακρίνονται ἀπό τό μικροσκόπιο.

Λύση

Ἔχουμε ὅτι

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant h.$$

ὅπου p_x ἡ συνιστώσα τῆς ὁρμῆς ἑνός σωματιδίου κατά τή διεύθυνση x.

Ἀλλά

$$p_x = m\upsilon_x \qquad \text{καί} \qquad \Delta p_x = m\Delta\upsilon_x$$

ὅπου υ_x ἡ συνιστώσα τῆς ταχύτητας τοῦ σωματιδίου κατά τή διεύθυνση x.

Ἡ μάζα ἑνός σωματιδίου πού μόλις μπορεῖ νά διακριθεῖ εἶναι

$$m=\rho V=\rho\left[\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3\right]=\frac{\pi\rho d^3}{6}$$

Ἄρα

$$\Delta\upsilon_x \geqslant \frac{6h}{\pi\rho d^3\Delta x}$$

Ἡ μεγαλύτερη ἀκρίβεια στή μέτρηση τῆς ταχύτητας υ_x ἀντιστοιχεῖ στήν ἐλάχιστη ἀβεβαιότητά της, ὁπότε τήν παραπάνω σχέση γιά τήν $\Delta\upsilon_x$ τήν παίρνουμε ὡς ἰσότητα.

Ὅταν ἀντικαταστήσουμε τίς τιμές βρίσκουμε

$$\Delta\upsilon_x \simeq 1.2\times10^{-6}ms^{-1}$$

Παράδειγμα ΙΙ-19 Ἄτομο Ἡλίου

Τό ἄτομο τοῦ ἡλίου ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα πυρήνα πού ἔχει μάζα M καί φορτίο $2e^+$ καί ἀπό δύο ἠλεκτρόνια πού ἔχουν ἀποστάσεις r_1 καί r_2 ἀπό τόν πυρήνα, μάζα m καί φορτίο e.

α) Νά γραφεῖ ἡ σχέση πού δίνει τήν ἐνέργεια τοῦ συστήματος συναρτήσει τῶν r_1, r_2, τῶν ὁρμῶν τῶν ἠλεκτρονίων p_1 καί p_2 καί τῆς ἀπόστασης r_{12} τῶν δύο ἠλεκτρονίων. Νά θεωρηθεῖ ὅτι $M\longrightarrow\infty$

β) Νά θεωρηθεῖ ὅτι ἡ ἀβεβαιότητα στήν ὁρμή τῶν δύο ἠλεκτρονίων εἶναι $\Delta p_1=p_1$ καί $\Delta p_2=p_2$ καί ἡ ἀβεβαιότητα στή θέση τους εἶναι ἴση μέ $\Delta r_1=R_1$ καί $\Delta r_2=R_2$ ὅπου R_1 καί R_2 οἱ ἀποστάσεις τῶν ἠλεκτρονίων στή χαμηλότερη ἐνέργεια τοῦ συστήματος (θεμελιώδη κατάσταση). Νά ἐφαρμοσθεῖ ἡ ἀρχή τῆς ἀβεβαιότητας καί νά προσδιορισθεῖ ἡ ἐνέργεια τῆς θεμελιώδους κατάστασης. (Σημείωση: στή θεμελιώδη κατάσταση τά ἠλεκτρόνια βρίσκονται σέ συμμετρικές θέσεις ὡς πρός τόν πυρήνα).

Τό πλάτος Α καθορίζει τά όρια τῆς κλασικά ἐπιτρεπόμενης περιοχῆς γιά τόν ἁρμονικό ταλαντωτῆ. Ἡ ἀπαγορευμένη περιοχή εἶναι ἡ $|x|>A$.

Κατά τήν κβαντομηχανική ἡ πιθανότητα νά βροῦμε ἕνα σωματίδιο στό διάστημα $(x,x+dx)$ εἶναι $|\psi(x)|^2dx$. Ἄρα ἡ πιθανότητα νά βρεθεῖ τό σωματίδιο στό διάστημα $(-A,A)$ εἶναι

$$P(-A,A)=\int_{-A}^{A}|\psi|^2dx=2\int_0^A|\psi|^2dx$$

Ἑπομένως ἡ πιθανότητα νά βρεθεῖ τό σωματίδιο στήν κλασικά ἀπαγορευμένη περιοχή $|x|>A$ εἶναι

$$P(|x|>A)=1-2\int_0^A|\psi|^2dx=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}A}\int_0^A e^{-\frac{x^2}{A^2}}dx$$

Ἄν κάνουμε τήν ἀντικατάσταση

$$\frac{x^2}{A^2}=\frac{2mE_0}{\hbar^2}x^2=y^2$$

καταλήγουμε στή σχέση

$$P(x>A)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-y^2}dy$$

Κάνοντας χρήση τοῦ προσεγγιστικοῦ τύπου βρίσκουμε

$$P(x>A)=0.16.$$

Παράδειγμα ΙΙ-21

Ἡ κυματική συνάρτηση τοῦ ἠλεκτρονίου στή θεμελιώδη κατάσταση τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου εἶναι ἡ

$$\psi(x,y,z)=(\pi a_0^3)^{-1/2}e^{-\frac{r}{a_0}}\qquad (r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

ὅπου $a_0\approx 0.5$ Å ἡ ἀκτίνα Bohr τοῦ ὑδρογόνου.

α) Νά ὑπολογισθεῖ ἡ πιθανότητα P νά βρεθεῖ τό ἠλεκτρόνιο στό ἐσωτερικό μιᾶς μικρῆς σφαίρας μέ κέντρο τό σημεῖο r=0 καί ἀκτίνα $r_0=0.05$ Å.

β) Νά ὑπολογισθεῖ ἡ πιθανότητα νά βρεθεῖ τό ἠλεκτρόνιο στό χῶρο πού ἔχει κέντρο τό σημεῖο r=0 καί ἀκτίνα a_0.

(Ὁ στοιχειώδης ὄγκος, dV, σέ σφαιρικές συντεταγμένες εἶναι

$$dV=r^2\sin\theta d\theta d\varphi dr.$$

Ἀκόμα,

$$\int x^2e^{\lambda x}dx=\frac{x^2e^{\lambda x}}{\lambda}-\frac{2}{\lambda^2}xe^{\lambda x}+\frac{2e^{\lambda x}}{\lambda^3}\Big)$$

Λύση

α) Ἡ πιθανότητα νά βρίσκεται τό ἠλεκτρόνιο σέ κάποιο στοιχειώδη ὄγκο dV σέ ἀπόσταση r εἶναι ἴση μέ

$$dP=|\psi(r)|^2dV=|\psi(r)|^2r^2\sin\theta d\theta dr d\varphi$$

Ἡ πιθανότητα P νά βρίσκεται τό ἠλεκτρόνιο στή σφαίρα μέ κέντρο τό σημεῖο $r=0$ καί ἀκτίνα r_0 εἶναι ἴση μέ

$$P=\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\psi^2r^2\sin\theta d\theta d\varphi dr$$

$$=4\pi\int_0^{r_0}\frac{1}{\pi a_0^3}e^{-2r/a_0}\,r^2dr$$

$$=\frac{4}{a_0^3}\left(-\frac{a_0r_0^2}{2}-\frac{a_0^2}{2}r_0-\frac{a_0^3}{4}\right)e^{-2r/a_0}+1$$

$$=1-\left(1+\frac{2r_0}{a_0}+\frac{2r_0^2}{a_0^2}\right)e^{-2r/a_0}\simeq 0.001.$$

β) Ἡ πιθανότητα νά βρίσκεται τό ἠλεκτρόνιο σέ σφαίρα ἀκτίνας a_0 εἶναι

$$P=1-(1+2+2)e^{-2}=0.32$$

Παράδειγμα II-22

Σωματίδιο κινεῖται πάνω στόν ἄξονα x. Σέ κάποια χρονική στιγμή ἡ κυματοσυνάρτησή του ἔχει τή μορφή

$$\psi(x)=be^{-|x-x_0|/a}\qquad (a>0),$$

ὅπου x_0 καί a εἶναι δοσμένες παράμετροι μέ διαστάσεις μήκους.

α) Ποιά πρέπει νά εἶναι ἡ ἀπόλυτη τιμή τοῦ b ὥστε ἡ $|\psi(x)|^2$ νά εἶναι μιά κατανομή πιθανότητας, δηλ. ἡ $\psi(x)$ νά εἶναι κανονικοποιημένη; (Βρεῖτε τήν τιμή αὐτή τοῦ $|b|$ συναρτήσει τοῦ a).

β) Ἄν γίνουν πολλές μετρήσεις τῆς συντεταγμένης x σωματιδίων πού ἔχουν κυματοσυνάρτηση ἴδια μέ τήν παραπάνω, ποιά θά εἶναι ἡ μέση τιμή τῆς x; τοῦ x^2; Ποιά εἶναι ἡ τυπική ἀπόκλιση;

γ) Ὑπολογίστε τήν πιθανότητα νά βρεθεῖ τό σωματίδιο στό διάστημα $(x_0-a,\ x_0+a)$.

Λύση

α) Γιά νά εἶναι ἡ $\psi(x)$ κανονικοποιημένη πρέπει τό ὁλοκλή -

ρωμα τῆς πυκνότητας πιθανότητας $|\psi(x)|^2$ πάνω σ'όλο τόν ἄξονα τῶν x νά ἰσοῦται μέ τή μονάδα. Ἄρα

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} dx|\psi(x)|^2=|b|^2\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-2|x-x_0|/a}$$

$$=|b|^2\left[\int_{-\infty}^{x_0} dx\ e^{-2(x_0-x)/a}+\int_{x_0}^{\infty} dx\ e^{-2(x-x_0)/a}\right]=|b|^2/a$$

Πρέπει λοιπόν τό $|b|$ νά ἔχει τήν τιμή $\sqrt{a}$.

β) Ἡ μέση τιμή τῆς συντεταγμένης x εἶναι

$$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} dx x|\psi(x)|^2=|b|^2\int_{-\infty}^{\infty} dx\ xe^{-2|x-x_0|/a}$$

$$=|b|^2\int_{-\infty}^{\infty} dx'\ (x'+x_0)e^{-2|x'|/a}\ =x_0$$

Ἐπίσης

$$\langle x^2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2|\psi(x)|^2=|b|^2\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^2e^{-2|x-x_0|/a}$$

$$=|b|^2\int_{-\infty}^{\infty} dx'\ (x'+x_0)^2e^{-2|x'|/a}\ =|b|^2\int_{-\infty}^{\infty} dx'\ (x^2+x_0^2)e^{-2|x'|/a}$$

$$=4a^2+x_0^2.$$

Ἐπομένως $\quad \Delta x \equiv\langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle^{1/2}=\sqrt{\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2}=2a$

γ) Ἡ ζητούμενη πιθανότητα εἶναι τό ὁλοκλήρωμα τῆς $|\psi(x)|^2$ ἀπό x_0-a μέχρι x_0+a δηλαδή:

$$|b|^2\int_{x_0-a}^{x_0+a} dx\ e^{-2|x-x_0|/a}=2|b|^2\int_0^a dx'\, e^{-2x'/a}=1-\frac{1}{e^2}=0.63$$

Παράδειγμα II-23

Ἡ κυματοσυνάρτηση στό χῶρο τῶν ὁρμῶν ἑνός σωματιδίου, πού κινεῖται σέ μιά διάσταση (π.χ. πάνω στόν ἄξονα x), εἶναι

$$C(p)=Ae^{-a|p-p_0|/\hbar}$$

α) Βρεῖτε τήν ἀντίστοιχη συνήθη κυματοσυνάρτηση $\psi(x)$.

β) Ἐκτιμῆστε τίς τυπικές ἀποκλίσεις Δp καί Δx τῆς ὁρμῆς p καί τῆς συντεταγμένης x καί δεῖξτε ὅτι τό γινόμενο, $(\Delta p)\cdot(\Delta x)$ εἶναι τῆς τάξης τοῦ $\hbar$ ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ α ἀπό τίς τιμές τῶν παραμέτρων a καί p_0.

Λύση

α) Ἡ $\psi(x)$ δίνεται ἀπό τό ὁλοκλήρωμα

$$\psi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} C(p)e^{ipx/\hbar}\, dp=A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|p-p_0|/\hbar+ipx/\hbar}\, dp$$

πού ὑπολογίζεται εὔκολα ἄν χωρίσουμε τό διάστημα ὁλοκληρώσεως στά $(-\infty,\ p_0)$ καί $(p_0,\ +\infty)$, στά ὁποῖα ἡ διαφορά p_1-p_0 ἔχει καθορισμένο πρόσημο:

$$\psi(x)=Ae^{-\alpha p_0/\hbar}\int_{-\infty}^{p_0} e^{(\alpha+ix)p/\hbar}\, dp\ +\ Ae^{\alpha p_0/\hbar}\int_{p_0}^{\infty} e^{(-\alpha+ix)p/\hbar}\, dp\ =$$

$$=\frac{\hbar A}{\alpha+ix}\, e^{ip_0x/\hbar}-\frac{\hbar A}{-\alpha+ix}\, e^{ip_0x/\hbar}=\frac{2\alpha A\hbar}{\alpha^2+x^2}\, e^{ip_0x/\hbar}$$

β) Ἀρκεῖ νά βροῦμε τίς μέσες τιμές τῶν x, x^2 καί τῶν p καί p^2. Προσδιορίζουμε πρῶτα τήν τιμή τοῦ $|A|$ ἔτσι ὥστε ἡ $\psi(x)$ νά εἶναι κανονικοποιημένη:

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} dx|\psi(x)|^2=|2\alpha A\hbar|^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(\alpha^2+x^2)^2}=\frac{2\pi\hbar^2}{\alpha}|A|^2$$

Μποροῦμε δηλ. νά θέσουμε $A=(\alpha/2\pi\hbar^2)^{1/2}$ καί νά ἔχουμε

$$\psi(x)=\left(\frac{2\alpha^3}{\pi}\right)^{1/2}\frac{e^{ip_0x/\hbar}}{\alpha^2+x^2}$$

Γιά τή μέση τιμή τοῦ x βρίσκουμε

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi(x)|^2dx= \frac{2\alpha^3}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{\alpha^2+x^2}=0$$

καί γιά τή μέση τιμή τοῦ x^2,

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2|\psi(x)|^2dx= \frac{2\alpha^3}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{\alpha^2+x^2}=\alpha^2$$

Ἑπομένως

$$\Delta x\equiv\sqrt{\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2}=\alpha$$

Προχωροῦμε τώρα στόν ὑπολογισμό τῶν μέσων τιμῶν τῶν p καί p^2. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ κυματοσυνάρτηση στό χῶρο τῶν ὁρμῶν

$$C(p)=Ae^{-a|p-p_0|/\hbar}$$

δέν εἶναι κανονικοποιημένη γιά τήν ἴδια τιμή τοῦ $A=(\alpha/2\pi\hbar^2)^{1/2}$ γιά τήν ὁποία ἡ $\psi(x)$ κανονικοποιεῖται. Πραγματικά:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|A|^2 e^{2a|p-p_0|/\hbar}\,dp=|A|^2/\alpha=1/2\pi\hbar^2$$

Ἄρα ἡ κανονικοποιημένη κυματοσυνάρτηση στό χῶρο τῶν ὁρμῶν εἶναι ἡ

$$\hat{C}(p)=\sqrt{\alpha/\hbar}\ e^{-a|p-p_0|/\hbar}$$

μέ βάση τήν ὁποία ὑπολογίζουμε τίς μέσες τιμές τῶν p καί p^2.

$$\langle p\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}p|\hat{C}(p)|^2dp=\frac{\alpha}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}pe^{-2a|p-p_0|/\hbar}\,dp=p_0$$

$$\langle p^2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}p^2|\hat{C}(p)|^2dp=\frac{\alpha}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}p^2e^{-2a|p-p_0|/\hbar}\,dp=$$

$$=p_0^2+\frac{\hbar^2}{2\alpha^2}$$

Κατά συνέπεια ἔχουμε

$$\Delta p\equiv\sqrt{\langle p^2\rangle-\langle p\rangle^2}=\frac{\hbar}{\sqrt{2}\alpha}$$

Τό γινόμενο τῶν τυπικῶν ἀποκλίσεων Δx καί Δp εἶναι ἴσο μέ $\hbar/\sqrt{2}$ καί εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τίς τιμές τῶν παραμέτρων α καί p_0. Σημειῶστε ἐπίσης ὅτι τό $\hbar/\sqrt{2}$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό κατώτερο ἐπιτρεπτό σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς ἀβεβαιότητας τοῦ Heisenberg

$$(\Delta x)(\Delta p)\geqslant\frac{\hbar}{2}$$

Σημείωση. Εἶναι πιό πρακτικό νά γράφουμε τή σχέση τῶν κυματοσυναρτήσεων $\psi(x)$ καί $C(p)$ μέ τή μορφή:

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}C(p)e^{ipx/\hbar}dp$$

Τότε κατά ἕνα θεώρημα γιά τά ὁλοκληρώματα Fourier ἔχουμε πάντοτε

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx|\psi(x)|^2=\int_{-\infty}^{\infty}dp|C(p)|^2$$

δηλ. ἄν η μία ἀπό τις $\psi(x)$ και $C(p)$ εἶναι κανονικ/νη, θά εἶναι και ἡ ἄλλη.

πτει όταν $Q'(p_0)=0$ δηλαδή όταν

$$\frac{\partial}{\partial p}\{\Phi(p)+px/\hbar\}_{p=p_0}=0\ .$$

Παράδειγμα II-27

Ἐλεύθερο σωματίδιο μέ μάζα m κινεῖται πάνω στόν ἄξονα x. Τή χρονική στιγμή t=0 ή κυματοσυνάρτησή του εἶναι

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(p)e^{ipx/\hbar}dp$$

ὅπου ή συνάρτηση $|C(p)|$ ἔχει ἕνα αἰχμηρό μέγιστο γιά $p=p_0$.

Ὑπολογῖστε προσεγγιστικά τήν τιμή τοῦ x γιά τήν ὁποία τό μέτρο τῆς $\psi(x)$ εἶναι μέγιστο σάν συνάρτηση τοῦ χρόνου t.

Λύση

Τό ὁλοκλήρωμα πού δίνει τήν $\psi(x)$

$$\psi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} C(p)e^{ipx/\hbar}\,dp$$

εἶναι μιά ἐπαλληλία ἀπό ἐπίπεδα κύματα τῆς μορφῆς $e^{ipx/\hbar}$ πού τό καθένα τους ὑπεισέρχεται μέ πλάτος C(p). Ἡ ἐξάρτηση ἑνός ἐπίπεδου κύματος μέ ὁρμή p (δηλ. κυματικό ἀριθμό $p/\hbar$) ἀπό τό χρόνο εἶναι πολύ ἁπλή ὅταν τό σωματίδιο εἶναι ἐλεύθερο: ή ὁρμή p καθορίζει καί τήν ἐνέργεια $p^2/2m$ καί ἑπομένως σέ χρόνο t ή κυματοσυνάρτηση τοῦ ἐπίπεδου κύματος θά εἶναι

$$e^{ipx/\hbar-i(p^2/2m)t/\hbar}$$

Ἡ ἐπαλληλία τῶν ἐπιπέδων κυμάτων γιά διάφορα p μέ πλάτη C(p) δίνει λοιπόν

$$\psi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} C(p)e^{ipx/\hbar-i(p^2/2m)t/\hbar}\,dp \qquad (1)$$

Ἡ παραπάνω ἔκφραση συμπίπτει μέ τήν $\psi(x)$ γιά t=0 καί ἐπίσης εἶναι εὔκολο νά βεβαιωθοῦμε ὅτι ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωση Schrödinger τοῦ ἐλεύθερου σωματιδίου

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$$

γιά ὅλα τά x καί t.

Ὁποιαδήποτε κι'ἄν εἶναι ἡ δοθεῖσα κυματοσυνάρτηση $\psi(x)$ γιά $t=0$, μποροῦμε μέ τόν παραπάνω τρόπο νά ἐκφράσουμε τήν κυματο - συνάρτηση γιά ὅλα τά t, σέ μορφή ὁλοκληρώματος. Κι'ὅταν ἀκόμη δέν εἶναι εὔκολο νά βροῦμε τό ὁλοκλήρωμα (1) ἀκριβῶς,πολλές φο ρές μποροῦμε νά τό ὑπολογίσουμε προσεγγιστικά.Ἄν π.χ. χρησιμοποιήσουμε τήν ἀνάλυση τῆς προηγούμενης ἄσκησης ἔχουμε

$$Q'(p_0)=\Phi'(p_0)+x/\hbar-p_0t/m\hbar.$$

Ἄρα ἔχουμε τό μέγιστο τῆς $\psi(x,t)$ γιά

$$x=-\hbar\Phi'(p_0)+\frac{p_0}{m}t$$

ὅπου p_0 εἶναι ἡ τιμή τοῦ p πού κάνει τήν $|C(p)|$ μέγιστη.Βλέπουμε λοιπόν ὅτι τό "κέντρο" τοῦ κυματοπακέτου ἑνός ἐλεύθερου σωματιδίου κινεῖται ὅπως ἕνα κλασικό (δηλ. μή κβαντικό) σωματίδιο μέ ταχύτητα p_0/m.

Παράδειγμα II-28

Ἐλεύθερο σωματίδιο ἔχει μάζα m καί κινεῖται σέ μιά διάσταση, πάνω στόν ἄξονα x. Τή χρονική στιγμή $t=0$ ἡ κυματοσυνάρτηση του $\psi(x,t)$ εἶναι

$$\psi(x,0)=Ce^{-ax^2+ip_0x/\hbar}, \quad a>0.$$

Ἄν οἱ πραγματικές σταθερές a καί p_0 θεωρηθοῦν γνωστές,

α) Γιά $t=0$ ὑπολογίστε τή μέση τιμή τῆς συντεταγμένης x τοῦ σωματιδίου. (Ἐννοεῖται ἐδῶ ἡ μέση τιμή πού θά προέκυπτε ἀπό ἀνεξάρτητες μετρήσεις τῆς x πάνω σ'ἕνα μεγάλο ἀριθμό σωματιδίων πού ὅλα ἔχουν τήν παραπάνω κυματοσυνάρτηση).

β) Κατά πόσο θά μεταβληθεῖ ἡ μέση τιμή τῆς x μετά παρέλευση ἑνός πολύ μικροῦ χρονικοῦ διαστήματος dt. (Ὑ π ό δ ε ι ξ η: Χρησιμοποιῆστε τήν ἐξίσωση Schrödinger).

Χρήσιμα ὁλοκληρώματα:

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-bx^2}=\sqrt{\pi/b},\qquad \int_{-\infty}^{\infty}dx\,x\,e^{-bx^2}=0,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}dx\,x^2e^{-bx^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}b^{-3/2}$$

Λύση

α) Ἄν διαλέξουμε τή σταθερά C τέτοια ὥστε ἡ $\psi(x,0)$ νά εἶναι κανονικοποιημένη τότε

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}dx|\psi(x,0)|^2=|C|^2\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-2ax^2}=|C|^2\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2a}}$$

Ἄρα ἄν $|C|^2=(2a/\pi)^{1/2}$, τότε τό μέγεθος $|\psi(x,0)|^2$ εἶναι ἡ πυκνότητα πιθανότητας. Ἡ μέση τιμή τῆς συντεταγμένης x εἶναι

$$\langle x\rangle_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot x|\psi(x,0)|^2 = (2a/\pi)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x\ e^{-2dx^2} = 0$$

[Σημ. Μέχρι ἐδῶ ἡ τιμή τῆς C δέ χρειάζεται.]

β) Ἡ μέση τιμή τῆς συντεταγμένης x τή χρονική στιγμή t εἶναι

$$\langle x\rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ x|\psi(x,t)|^2$$

Ἡ μεταβολή της σέ πολύ μικρό χρονικό διάστημα dt ἀπό τή χρονική στιγμή t=0 θά εἶναι

$$(dt)\frac{\partial}{\partial t}\langle x\rangle_t\Big|_{t=0} = (dt)\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x\left\{\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi+\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\}_{t=0} \tag{1}$$

Ἡ ἐξίσωση Schrödinger γιά ἕνα ἐλεύθερο σωματίδιο εἶναι

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Ἀντικαθιστώντας τήν παράγωγο ὡς πρός τό χρόνο ἀπό τήν ἐξίσωση Schrödinger στήν (1) ἔχουμε

$$(dt)\frac{\partial}{\partial t}\langle x\rangle_t\Big|_{t=0} = (dt)\frac{i\hbar}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x\left\{-\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\psi+\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right\}_{t=0} =$$

$$= (dt)\frac{i\hbar}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x\ |C|^2(-8ap_0 ix)e^{-2dx^2}$$

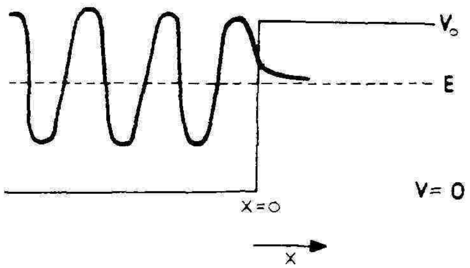
$$= \frac{2p_0}{m}(dt)|C|^2\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^2 e^{-2ax^2} = \frac{p_0}{m}dt$$

Ἄρα ἡ μέση τιμή τῆς συντεταγμένης x, πού μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σάν "κέντρο" τοῦ κυματοπακέτου, κινεῖται μέ ταχύτητα p_0/m, πού συμπίπτει μέ τήν ταχύτητα ἑνός κλασικοῦ σωματιδίου μέ ὁρμή p_0.

Παράδειγμα II-29

Όπως ξέρουμε ή κυματική έξίσωση τοῦ Schrödinger έπιτρέπει σέ σωματίδιο μέ όλική ένέργεια E νά διεισδύσει σέ περιοχή δυναμικοῦ μέ $V > E$. Στήν περίπτωση τοῦ όρθογώνιου βήματος δυναμικοῦ βάθους $V_0 > E$, δεῖξτε πώς αὐτή ή διείσδυση εἶναι συμβιβαστή μέ τήν άρχή τῆς άβεβαιότητας τοῦ Heisenberg.

Ύ π ό δ ε ι ξ η: Σάν "άβεβαιότητα θέσης" μέσα στήν κλασικά άπαγορευμένη περιοχή $(x > 0)$ όρίστε ένα μῆκος Δx πέρα άπό τό όποῖο ή τιμή τῆς κυματοσυνάρτησης πού περιγράφει τό σωματίδιο έλαττώνεται "σημαντικά" (π.χ. στό 1/e τῆς τιμῆς πού ἔχει γιά x=0).



Λύση

Γιά $x > 0$ ή χρονικά άνεξάρτητη έξίσωση Schrödinger, γίνεται

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)\psi(x)=0$$

καί ἔχει γενική λύση τήν $\psi(x)=Ce^{-qx}+De^{+qx}$, $q=\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$.

θέτουμε D=0 έπειδή ή e^{+qx} δέν εἶναι φυσικά παραδεκτή.

Άν πάρουμε τώρα σάν άβεβαιότητα θέσης, γιά $x > 0$, τό Δx γιά τό όποῖο

$$e^{-q\Delta x} = \frac{1}{e}$$

τότε

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0-E)}}$$

Γιά νά παρατηρηθεῖ τό σωματίδιο μέσα στή κλασικά άπαγορευμένη περιοχή θά πρέπει νά άλληλεπιδράσει μέ φωτόνιο πού νά ἔχει μῆκος κύματος τῆς τάξης μεγέθους $\lambda \sim \Delta x$. Ή όρμή τοῦ φωτονίου αὐτοῦ θά εἶναι

$$p = \frac{h}{\lambda} \sim \frac{h}{\Delta x} \sim \sqrt{2m(V_0-E)}$$

Άν κατά τήν άλληλεπίδραση αὐτή τό φωτόνιο μεταδώσει ὅλη τήν όρμή του στό σωματίδιο, ή ένέργεια τοῦ σωματιδίου θά μεταβληθεῖ κατά

$$\Delta E = \frac{p^2}{2m} \sim V_0 - E$$

Έτσι ή όλική ένέργεια τοῦ σωματιδίου θά γίνει

$$E+\Delta E \sim V_0$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ μέτρηση διαταράσσει τήν κατάσταση τοῦ σωματιδίου, ἔτσι, ὥστε ἡ ὁλική του ἐνέργεια νά γίνεται συγκρίσιμη μέ τή V_0. Ἑπομένως ἡ περιοχή μέ $x>0$ παύει νά εἶναι κλασικά ἀπαγορευμένη. Ἡ μέτρηση μεταβάλλει ἐπίσης τήν ὁρμή p τοῦ σωματιδίου κατά

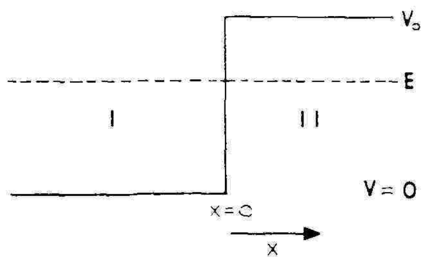
$$\Delta p=\sqrt{2m\cdot\Delta E} \sim \sqrt{2m(V_0-E)}$$

Ἄρα,

$$\Delta p\cdot\Delta x \sim h$$

Παράδειγμα II-30

Στήν ἐπιφάνεια ἑνός μετάλλου ἐξασκοῦνται πάνω στά ἐλεύθερα ἠλεκτρόνια δυνάμεις, πού μποροῦν νά περιγραφοῦν σέ πρώτη προσέγγιση ἀπό ἕνα βῆμα δυναμικοῦ. Ἄν τό ἔργο ἐξαγωγῆς εἶναι $b=V_0-E=4$ eV, νά ὑπολογισθεῖ ἡ τάξη μεγέθους τοῦ βάθους στό ὁποῖο μπορεῖ νά διεισδύσει ἕνα ἐλεύθερο ἠλεκτρόνιο στήν κλασικά ἀπαγορευμένη περιοχή II (δηλ. στόν ἐλεύθερο χῶρο).



Λύση

Ἡ πυκνότητα πιθανότητας στήν περιοχή II εἶναι ἀνάλογη τοῦ e^{-2k_2x} ὅπου

$$k_2=\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$$

Ἄρα κατά προσέγγιση τό βάθος διεισδύσεως (βλ. Παράδ. II-29) θά εἶναι

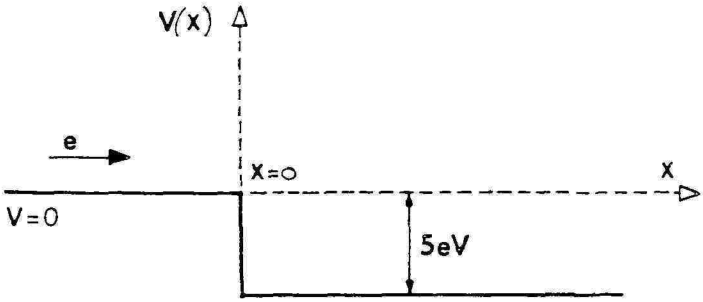
$$\Delta x=\frac{1}{k_2}=\frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0-E)}}=\frac{10^{-34}\,\mathrm{J.s}}{\sqrt{2\times9\times10^{-31}\,\mathrm{kg}\times4\times1.6\times10^{-19}\,\mathrm{J}}}$$

$$=10^{-10}\,\mathrm{m}=1\ \text{Å}$$

δηλ. μιά ἀπόσταση πού εἶναι σημαντική σέ ἀτομική κλίμακα.

Παράδειγμα II-31

Ἐλεύθερο ἠλεκτρόνιο μέ ἀρχική κινητική ἐνέργεια E=4eV προσπίπτει κάθετα στήν ἐπιφάνεια μετάλλου μέσα στό όποῖο τό δυναμικό εἶναι χαμηλώτερο κατά W=5eV. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά ἀνακλαστεῖ τό ἠλεκτρόνιο;



Λύση

Ἡ ὁρμή τοῦ ἠλεκτρονίου ἀρχικά εἶναι $p=\sqrt{2mE}$ καί ἡ κυματοσυνάρτηση γιά $x<0$ θά εἶναι

$$Ae^{ipx/\hbar}+Be^{-ipx/\hbar} \qquad x<0$$

δηλ. ὑπέρθεση ἑνός προσπίπτοντος κύματος μέ κυματικό ἀριθμό $p/\hbar$ πού ὁδεύει πρός τά δεξιά καί ἑνός ἀνακλώμενου μέ κυματικό ἀριθμό $-p/\hbar$ πού ὁδεύει πρός τά ἀριστερά. Ἡ σταθερά B/A εἶναι τό πλάτος ἀνακλάσεως πού πρέπει νά προσδιοριστεῖ. Στήν περιοχή $x>0$, μέσα στό μέταλλο, ἡ κινητική ἐνέργεια εἶναι $E+W$ καί ἡ κυματοσυνάρτηση θά ἀποτελεῖται μόνο ἀπό ἕνα κύμα πού ὁδεύει πρός τά δεξιά:

$$Ce^{ip'x/\hbar} \qquad x>0$$

ὅπου $p'=\sqrt{2m(E+W)}$. Οἱ συνθῆκες συνέχειας στό σύνορο $x=0$ γιά τήν κυματοσυνάρτηση καί τήν παράγωγό της δίνουν

$$A+B=C$$
$$pA-pB=p'C$$

Λύνοντας ὡς πρός B/A καί C/A ἔχουμε

$$\frac{B}{A}=\frac{p-p'}{p+p'} \quad , \quad \frac{C}{A}=\frac{2p}{p+p'}$$

Ἡ πιθανότητα ἀνακλάσεως εἶναι ἴση μέ $|B/A|^2$ δηλ.

$$\left|\frac{p-p'}{p+p'}\right|^2=\left(\frac{\sqrt{2mE}-\sqrt{2m(E+W)}}{\sqrt{2mE}+\sqrt{2m(E+W)}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{E+W}-\sqrt{E}}{\sqrt{E+W}-\sqrt{E}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{9}-\sqrt{4}}{\sqrt{9}+\sqrt{4}}\right)^2=\frac{1}{25}$$

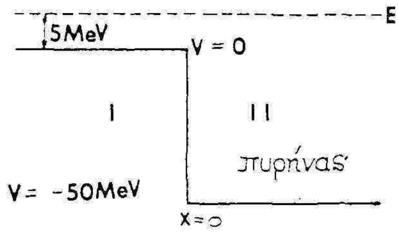
Παράδειγμα ΙΙ-32' Ανάκλαση νετρονίου από πυρήνα

Νετρόνιο, μέ κινητική ένέργεια K=5 MeV πέφτει πάνω σ'ένα πυρήνα. Προσεγγιστικά, δεχόμαστε ότι ή έλκτική δύναμη πού δρᾶ πάνω στό νετρόνιο κοντά στήν έπιφάνεια τοῦ πυρήνα παράγεται ἀπό ἕνα ὀρθογώνιο βῆμα δυναμικοῦ βάθους V=50 MeV.

α) Πόση εἶναι ἡ πιθανότητα νά μπεῖ τό νετρόνιο μέσα στόν πυρήνα καί πόση νά άνακλαστεῖ;

β) Ἄν τό νετρόνιο βρισκόταν μέσα στόν πυρήνα καί ἔπεφτε στήν ἐπιφάνεια τοῦ πυρήνα (ἀπό δεξιά, στό σχῆμα) μέ ὁλική ένέργεια 5 MeV, ποιές θά ἦταν οἱ πιθανότητες ἀνάκλασης καί μετάδοσης τοῦ νετρονίου;

γ) Τά ἀποτελέσματα πού βρήκαμε στά (α) καί (β), ἀντιφάσκουν μέ τίς ἀντίστοιχες κλασικές προβλέψεις;



Λύση

Ἡ χρονικά ἀνεξάρτητη ἐξίσωση τοῦ Schrödinger εἶναι

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V(x))\psi(x)=0,$$

ὅπου E ἡ ὁλική ἐνέργεια καί V ἡ δυναμική ἐνέργεια.

Οἱ γενικές λύσεις τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι:

Γιά $x<0$

$$\psi_I(x)=Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x}$$

$$k_1=\frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar},\quad E-V=E=K=5\text{ MeV}$$

Ὁ α' ὅρος ἀντιπροσωπεύει τό προσπίπτον κύμα καί ὁ β' τό ἀνακλώμενο.

Γιά $x>0$

$$\psi_{II}(x)=Ce^{ik_2x}+De^{-ik_2x}$$

$$k_2=\frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar},\quad E-V=5+50=55\text{ MeV}$$

$D=0$, γιατί δέν ὑπάρχει ἀνακλώμενο κύμα στή περιοχή II.

Συνέχεια τῆς ψ καί τῆς πρώτης παραγώγου της στό $x=0$, ὁδηγοῦν στίς

$$A+B=C \qquad B=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}A$$

ὁπότε

$$k_1(A-B)=k_2C \qquad C=\frac{2k_1}{k_1+k_2}A$$

Ὁ συντελεστής ἀνακλάσεως εἶναι $R=\frac{BB^*}{AA^*}=\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2=0.288$ ὁπότε ὁ συντελεστής διαδόσεως T θά εἶναι

$$T=1-R=0.712$$

β) Οἱ λύσεις τῆς ἐξισ. Schrödinger εἶναι σ'αὐτή τήν περί - πτωση:

Γιά $x<0$

$$\psi_I(x)=Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x}$$

$$A=0$$

γιατί ὑπάρχει μόνο τό μεταδιδόμενο κύμα πού κινεῖται πρός τά ἀριστερά.

Γιά $x>0$

$$\psi_{II}(x)=Ce^{ik_2x}+De^{-ik_2x}$$

Ἡ συνέχεια τῶν ψ καί $\frac{d\psi}{dx}$ στό $x=0$ ὁδηγοῦν στίς ἐκφράσεις

$$B=\frac{2k_1}{k_1+k_2}D, \qquad C=\frac{k_2-k_1}{k_1+k_2}D$$

γιά τά πλάτη τοῦ μεταδιδόμενου καί ἀνακλώμενου κύματος συναρτήσει τοῦ πλάτους D τοῦ προσπίπτοντος. Ὁπότε καί πάλι

$$R=0.288 \quad \text{καί} \quad T=0.712$$

γ) Τά ἀποτελέσματα στά α καί β ἀντιφάσκουν μέ τίς κλασικές προβλέψεις κατά τίς ὁποῖες, ἀφοῦ $E>V$, θά πρέπει νά ἔχουμε βέβαιη μετάδοση καί στό α καί στό β ἐρώτημα. Κβαντομηχανικά ὅμως βρήκαμε καί μιά πιθανότητα ἀνάκλασης $R\neq 0$.

Σημείωση: Ἐπειδή ὁ συντελεστής ἀνάκλασης δέν εἶναι μηδέν τό νετρόνιο δέν μπαίνει πάντοτε μέσα στόν πυρήνα καί ἑπομένως δέν μπορεῖ πάντοτε νά προκαλέση πυρηνική σχάση.

Παράδειγμα ΙΙ-33 Σκέδαση συντονισμοῦ (Ramsauer)

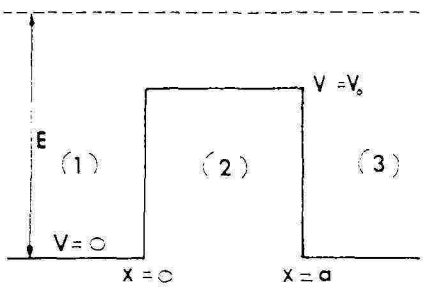
Ἠλεκτρόνιο μέ κινητική ἐνέργεια E πέφτει ἀπό ἀριστερά (περιοχή 1) σέ φράγμα δυναμικοῦ ὕψους $V_0 < E$ καί εὕρους α.

α) Γράψτε τή μορφή τῶν κυματοσυναρτήσεων πού περιγράφουν τό σωματίδιο στίς περιοχές 1,2 καί 3.

β) Ποιές εἶναι οἱ ὁριακές συνθῆκες στά σημεῖα x=0 καί x=α;

γ) Ὁ συντελεστής μετάδοσης στή περιοχή (3) εἶναι

$$T=\left\{1+\frac{V_0^2\sin^2 k_2 a}{4E(E-V_0)}\right\}^{-1}$$



ὅπου k_2 τό μέτρο τοῦ κυματοδιανύσματος στήν περιοχή (2). Ὑπάρχουν τιμές τοῦ E γιά τίς ὁποῖες τό ἠλεκτρόνιο συμπεριφέρεται "κλασικά", δηλ. περνάει στήν περιοχή (3) ὁπωσδήποτε χωρίς νά ἀνακλαστεῖ;

Λύση

α) Ἡ γενική λύση τῆς χρονικά ἀνεξάρτητης ἐξισώσης Schrödinger στίς περιοχές 1,2 καί 3 εἶναι ἀντίστοιχα:

$$\psi_1(x)=Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x} \qquad x<0 \tag{1}$$

$$\psi_2(x)=Ce^{ik_2x}+De^{-ik_2x} \qquad 0<x<\alpha \tag{2}$$

$$\psi_3(x)=Fe^{ik_3x}+Ge^{-ik_3x} \qquad x>\alpha \tag{3}$$

$$k_1=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar},\quad k_2=\frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar},\quad k_3=k_1 \tag{4}$$

Ἐπειδή γιά $x>\alpha$ δέν ὑπάρχει καμιά ἀσυνέχεια τοῦ δυναμικοῦ δέν περιμένουμε ἀνακλώμενο κύμα πού νά διαδίδεται ἀπό τά δεξιά σ' αὐτή τήν περιοχή. Ἔτσι θέτουμε G=0.

β) Στίς θέσεις x=0 καί x=α ὅπου τό δυναμικό εἶναι ἀσυνεχές οἱ $\psi(x)$ καί $\frac{d\psi(x)}{dx}$ εἶναι συνεχεῖς, δηλ. ἰσχύει

$$\psi_1(0)=\psi_2(0),\quad \psi_1'(0)=\psi_2'(0) \tag{5}$$

$$\psi_2(\alpha)=\psi_3(\alpha),\quad \psi_2'(\alpha)=\psi_3'(\alpha) \tag{6}$$

Οἱ σχέσεις (1)-(6) δίνουν τίς ἑξῆς συνθῆκες μεταξύ τῶν πλατῶν A, B, C, D καί F τῶν διαφόρων κυμάτων πού συνιστοῦν τίς ψ_1, ψ_2 καί ψ_3:

$$A+B=C+D$$

$$Ak_1-Bk_1=Ck_2-Dk_2$$

$$Ce^{k_2a}+De^{-k_2a}=Fe^{ik_3a}$$

$$Ck_2e^{k_2a}-Dk_2e^{-k_2a}=Fk_3e^{ik_3a}$$

γ) Γιά νά περνάει τό ήλεκτρόνιο όπωσδήποτε στήν περιοχή 3, ό συντελεστής μετάδοσης θά πρέπει νά είναι ΐσος μέ τήν μονάδα. 'Από τήν έκφραση πού δίνεται γιά τό συντελεστή μετάδοσης προκύπτει ότι

$$\frac{V_0^2\sin^2k_2a}{4E(E-V_0)}=0$$

Αύτό άληθεύει είτε προσεγγιστικά γιά έξαιρετικά ύψηλές ένέργειες τοῦ ήλεκτρονίου δηλ. $E>>V_0$, είτε άκριβῶς όταν

$$\sin k_2a=0 \quad \text{δηλ.} \quad k_2a=n\pi \qquad n=0,1,2,...$$

'Η (4) τότε δίνει

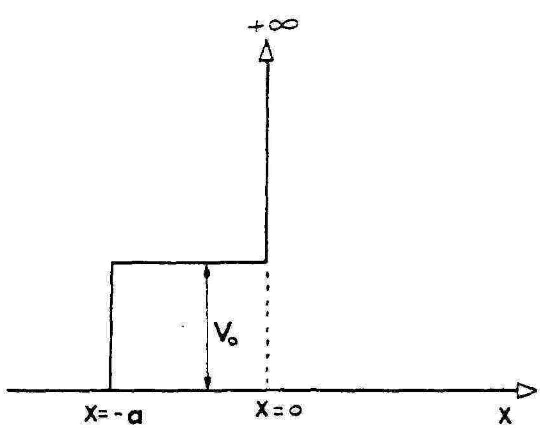
$$\frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}=n\frac{\pi}{a}$$

ή

$$E=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}+V_0, \qquad n=0,1,2,...$$

Παράδειγμα ΙΙ-34

Σωματίδιο μέ μάζα m πέφτει άπό άριστερά πάνω στό δυναμικό τοῦ σχήματος. 'Υπολογίστε τόν συντελεστή άνακλάσεως R σάν συνάρτηση τῆς ένέργειας E τοῦ σωματιδίου, α) άν $E>V_0$ καί β) άν $E<V_0$.



Λύση

α) Στήν περίπτωση $E > V_0$ έχουμε οδεύοντα κύματα καί στίς δυό περιοχές I: $(-\infty < x < -a)$ καί II: $(-a < x < 0)$.

'Αφοῦ στήν καθεμιά άπό τίς παραπάνω περιοχές τό δυναμικό εἶναι σταθερό, ἡ λύση τῆς ἐξίσωσης Schrödinger εἶναι γραμμικός συνδυασμός τῶν ἐκθετικῶν $e^{\pm ikx}$, ὅπου k ὁ κατάλληλος κυματικός άριθμός ἴσος κάθε φορά μέ τήν άντίστοιχη κλασική ὁρμή διαιρεμένη μέ $\hbar$. Ἔτσι στήν περιοχή I ἔχουμε τήν κυματοσυνάρτηση

$$\psi_I(x) = e^{ipx/\hbar} + Re^{-ipx/\hbar}, \quad p = \sqrt{2mE}$$

δηλ. μιά ὑπέρθεση ἑνός προσπίπτοντος κύματος καί ἑνός ἀνακλωμένου μέ σχετικό πλάτος R. Ὅμοια, στήν περιοχή II, ἔχουμε μιά ἐπαλληλία τῶν $e^{ip'x/\hbar}$ καί $e^{-ip'x/\hbar}$ μέ $p' = \sqrt{2m(E-V_0)}$ πού ὅμως πρέπει νά μηδενίζεται στό $x=0$. Ἄρα

$$\psi_{II}(x) = A\sin(p'x/h), \quad p' = \sqrt{2m(E-V_0)}$$

Οἱ συνθῆκες συνέχειας τῆς $\psi(x)$ καί τῆς $d\psi(x)/dx$ στό $x=-a$ μᾶς δίνουν τίς σχέσεις

$$e^{-ipa/\hbar} + Re^{ipa/\hbar} = -A\sin(p'a/\hbar)$$

$$ipe^{-ipa/\hbar} - ipRe^{ipa/\hbar} = Ap'\cos(p'a/\hbar)$$

Οἱ παραπάνω σχέσεις μᾶς δίνουν τά R καί A. Βρίσκουμε λοιπόν

$$R = e^{-2ipa/\hbar}\,\frac{p' + ip\tan(p'a/\hbar)}{-p' + ip\tan(p'a/\hbar)}$$

β) Θεωροῦμε τώρα τήν περίπτωση $E < V_0$. Ἡ μόνη διαφορά εἶναι ὅτι τώρα στήν περιοχή II ἡ γενική λύση τῆς ἐξίσωσης Schrödinger εἶναι γραμμικός συνδυασμός τῶν πραγματικῶν ἐκθετικῶν $e^{\pm p''x/\hbar}$ καί ὄχι ὁδευόντων κυμάτων (πρόκειται γιά κλασικά ἀπαγορευμένη περιοχή).

Ἔχουμε λοιπόν

$$\psi_I(x) = e^{ipx/\hbar} + R\,e^{-ipx/\hbar}, \quad p = \sqrt{2mE}$$

$$\psi_{II}(x) = B\sinh(p''x/h), \quad p'' = \sqrt{2m(V_0 - E)}$$

Οἱ συνθῆκες συνέχειας εἶναι

$$e^{-ipa/\hbar} + ipRe^{ipa/\hbar} = A\sinh(p''a/\hbar)$$

$$ipe^{-ipa/\hbar} - ipRe^{ipa/\hbar} = Ap''\cosh(p''a/\hbar)$$

$$R = e^{-2ipa/\hbar}\frac{p'+ip\ \tanh(p''a/\hbar)}{-p'+ip\ \tanh(p''a/\hbar)}$$

Παρατήρηση: Καί στίς δύο περιπτώσεις (εἴτε $E>V_0$ εἴτε $E<V_0$) ἡ πιθανότητα ἀνάκλασης εἶναι $|R|^2=1$ πράγμα πού θά μπορούσαμε νά τό δοῦμε ἀμέσως χωρίς κανένα ὑπολογισμό γιατί ἡ πιθανότητα τό σωματίδιο νά περάσει πρός $x \longrightarrow +\infty$ εἶναι προφανῶς μηδέν: Τό δυναμικό γιά $x>0$ εἶναι $+\infty$ καί ἄρα ἡ κυματοσυνάρτηση εἶναι πάντα μηδέν δεξιά τοῦ $x=0$.

Ὁ συντελεστής ἀνάκλασης ἔχει λοιπόν τή μορφή

$$R = e^{\varphi}$$

ὅπου ἡ φάση φ εἶναι πραγματική καί ἐξαρτᾶται ἀπό τήν E. Ποιά εἶναι λοιπόν ἡ φυσική σημασία τῆς φ ἀφοῦ δέν ἐπηρεάζει καθόλου τήν πιθανότητα ἀνάκλασης; Μπορεῖ νά δειχτεῖ γενικά ὅτι ἡ ταχύτητα μεταβολῆς τῆς φάσης τοῦ συντελεστῆ ἀνάκλασης μέ τήν ἐνέργεια E καθορίζει τή σχετική χρονική καθυστέρηση πού ἐπιφέρει ἕνα συγκεκριμένο δυναμικό στήν ἀνάκλαση μιᾶς κυματοδέσμης σέ σύγκριση μέ τό χρόνο πού χρειάζεται γιά νά ἀνακλασθεῖ ἕνα σωματίδιο (μέ τήν ἴδια ἐνέργεια) στό σημεῖο $x=0$. Συγκεκριμένα ὁ χρόνος καθυστέρησης τ δίνεται ἀπό τόν τύπο

$$\tau \simeq \hbar\,\partial\varphi/\partial E$$

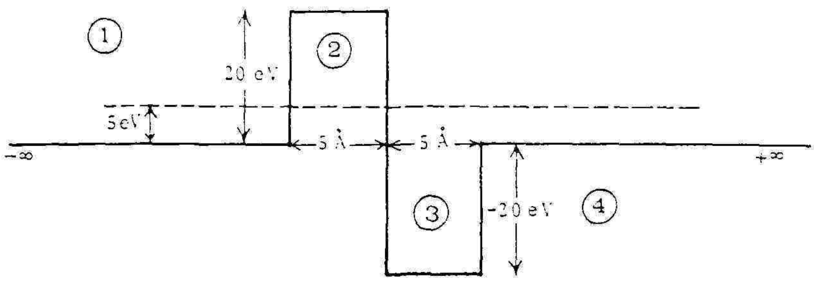
ὅπου φ ἡ φάση τοῦ συντελεστή ἀνάκλασης R (πού θά πρέπει νά τήν ξέρουμε σά συνάρτηση τῆς E). Σάν ἕνα πολύ ἁπλό παράδειγμα ἄς θεωρήσουμε μιά ὁριακή περίπτωση αὐτοῦ τοῦ προβλήματος ὅπου τό V_0 γίνεται πολύ μεγάλο (δηλ. πολύ μεγαλύτερο ἀπό τήν ἐνέργεια E). Τότε ὁ συντελεστής ἀνάκλασης πλησιάζει τήν τιμή

$$R \approx e^{-2ipa/\hbar}$$

Ἔχουμε τότε $\varphi \approx -2pa/\hbar = -2\sqrt{2mE}\,a/\hbar$ καί ἄρα $\tau=-2ap/m=-2a/\upsilon$. Ἔχουμε δηλαδή ἐπίσπευση κατά $2a/\upsilon$. Πραγματικά, στό ὅριο αὐτό οὐσιαστικά ἔχουμε ἀνάκλαση στό σημεῖο $x=-a$ ὁπότε τό διανυόμενο διάστημα συντομεύεται κατά 2a.

Παράδειγμα ΙΙ-35 Δυναμικό σταθερό κατά τμήματα

Ἠλεκτρόνιο, πού ἔχει ἐνέργεια 5 eV καί κινεῖται σέ μιά διάσταση, προσπίπτει ἀπό ἀριστερά στό παρακάτω δυναμικό:



α) Γράψτε τίς φυσικά παραδεκτές λύσεις τῆς ἐξίσωσης Schrödinger στίς περιοχές 1,2,3 καί 4 καί ἐξηγῆστε τί παριστάνει ἀπό φυσική ἄποψη καθένας ὅρος αὐτῶν τῶν λύσεων.

β) Στίς περιοχές ὅπου ἡ λύση ἔχει ταλαντούμενη μορφή βρεῖτε τά ἀντίστοιχα μήκη κύματος (σέ Å).

γ) Σχεδιάστε τό πραγματικό μέρος τῆς λύσης τῆς ἐξίσωσης Schrödinger γιά $-\infty < x < +\infty$. Τό σχέδιο νά εἶναι χονδρικό, ἀλλά νά ἀναδεικνύει τά σημαντικά φυσικά χαρακτηριστικά τῆς λύσης. Ἐξηγῆστε ποιά χαρακτηριστικά προσπαθήσατε νά ἀποδώσετε στό σχέδιό σας.

δ) Ἐκτιμῆστε τήν τάξη μεγέθους τῆς ἐπί τοῖς ἑκατό πιθανότητας μετάδοσης τοῦ ἠλεκτρονίου ἀπό τήν περιοχή 1 στήν περιοχή 3.

Λύση

α) Ἡ ἐξίσωση Schrödinger γι'αὐτό τό πρόβλημα γράφεται

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi(x)=0,$$

ὅπου m ἡ μάζα τοῦ ἠλεκτρονίου, E=5eV ἡ ὁλική ἐνέργεια τοῦ ἠλεκτρονίου καί

$$V=\begin{cases} V_1=0 & \text{στήν περιοχή } 1, \\ V_2=20\text{eV} & \quad '' \quad 2, \\ -V_3=-20\text{eV} & \quad '' \quad 3, \\ V_4=0 & \quad '' \quad 4, \end{cases}$$

ἡ δυναμική ἐνέργεια τοῦ ἠλεκτρονίου. Οἱ λύσεις αὐτῆς τῆς ἐξίσωσης εἶναι:

Στήν περιοχή 1,

$$\psi_1(x)=Ae^{+ik_1x}+Be^{-ik_1x},$$

όπου $k_1=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ καί A,B αύθαίρετες σταθερές.

'Ο πρῶτος ὅρος αὐτῆς τῆς λύσης παριστάνει τό προσπίπτον κύμα πάνω στήν ἀσυνέχεια τοῦ δυναμικοῦ ἀνάμεσα στίς περιοχές 1 καί 2 καί ὁ δεύτερος τό ἀνακλώμενο.

Στήν περιοχή 2 ἔχουμε

$$\psi_2(x)=Ce^{-q_2x}+De^{+q_2x},$$

ὅπου $q_2=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_2-E)}$ καί C,D αύθαίρετες σταθερές.

'Εδῶ ἔχουμε ἐκθετικές λύσεις τῆς ἐξ. Schrödinger·δέν πρόκειται γιά ὁδεύοντα κύματα. Καί οἱ δυό ὅροι εἶναι φυσικά παραδεκτοί,ἀφοῦ ἡ περιοχή 2 εἶναι πεπερασμένη.

Στήν περιοχή 3, ἀνάλογα μέ τήν 1, θά ἔχουμε

$$\psi_3(x)=Ee^{+ik_3x}+Fe^{-ik_3x},$$

ὅπου $k_3=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_3)}$, ἐνῶ στήν περιοχή 4

$$\psi_4(x)=Ge^{ik_4x} \qquad (k_4=k_1).$$

Στήν τελευταία λύση δέν ἔχουμε περιλάβει ἀνακλώμενο κύμα, ἀφοῦ ἡ περιοχή 4 ἐκτείνεται ὡς τό ἄπειρο χωρίς τό δυναμικό νά παρουσιάζει ἀσυνέχειες.

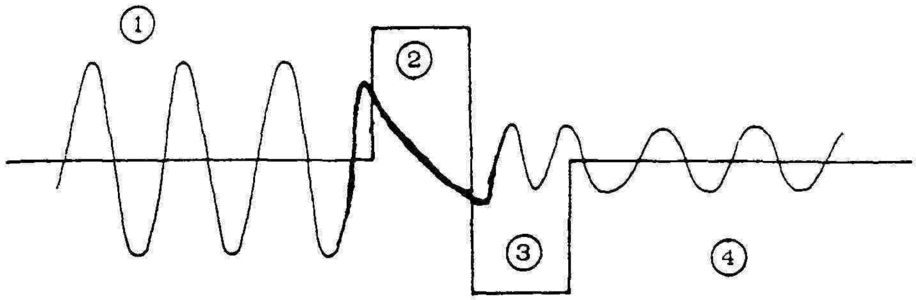
Οἱ σταθερές A,B,...,G προσδιορίζονται ἀπό τίς ἀπαιτήσεις συνέχειας τῆς συνολικῆς λύσης καί τῆς πρώτης παραγώγου της στά σημεῖα ὅπου τό δυναμικό παρουσιάζει ἀσυνέχειες, καθώς ἐπίσης καί ἀπό μιά δεδομένη πιθανότητα πρόσπτωσης τοῦ ἠλεκτρονίου.

β) Βρήκαμε ὅτι λύσεις μέ ταλαντούμενη συμπεριφορά ὑπάρχουν στίς περιοχές 1,3 καί 4. Γιά τά ἀντίστοιχα μήκη κύματος βρίσκουμε

$$k_1=k_4=\sqrt{\frac{2mc^2}{(\hbar c)^2}E}=1.15\ \text{Å}^{-1},\ \text{δηλ.}\ \ \lambda_1=\lambda_4=\frac{2\pi}{k_1}=5.48\ \text{Å},$$

$$k_3=\sqrt{\frac{2mc^2}{(\hbar c)^2}(E+V_3)}=2.56\ \text{Å}^{-1},\ \text{δηλ.}\ \ \lambda_3=\frac{2\pi}{k_3}=2.45\ \text{Å}.$$

γ) Μιά χονδρική γραφική παράσταση τοῦ πραγματικοῦ μέρους ($\mathrm{Re}\,e^{ikx}=\cos kx$) τῆς λύσης εἶναι ἡ παρακάτω ἡ όποία ἔχει τά ἀκό-



λουθα σημαντικά χαρακτηριστικά.

1) Συνέχεια τῆς λύσης καί τῆς πρώτης παραγώγου της ἀκόμα καί στά σημεῖα ὅπου τό δυναμικό παρουσιάζει ἀσυνέχεια.

2) Τό πλάτος τοῦ κύματος στίς περιοχές 3 καί 4 εἶναι πολύ μικρότερο ἀπό τό πλάτος τοῦ κύματος στήν περιοχή 1.

'Ο λόγος τοῦ πλάτους κύματος στήν περιοχή 3 πρός τό πλάτος κύματος στήν περιοχή 1 ἔχει ληφθεῖ στό σχῆμα πολύ μεγαλύτερος ἀπό ὅσος εἶναι στήν πραγματικότητα, γιά λόγους παραστατικότητας, (βλ. ἀπάντηση στήν ἑπόμενη ἐρώτηση).

3) Τό πλάτος κύματος στίς περιοχές 1,3 καί 4 εἶναι σταθερό.

4) Στήν περιοχή 2 ἡ κυματοσυνάρτηση δέν ταλαντώνεται ἀλλά ἔχει ἐκθετική συμπεριφορά.

5) Στίς περιοχές 1 καί 4 ἔχουμε τό ἴδιο μῆκος κύματος. Στήν περιοχή 3 τό μῆκος κύματος εἶναι περίπου τό μισό ἀπό ἐκεῖνο πού ἀντιστοιχεῖ στίς περιοχές 1 καί 4.

δ) 'Η τάξη μεγέθους τοῦ συντελεστή μετάδοσης ἀπό τήν περιοχή 1 στήν περιοχή 3 δίνεται ἀπό τή σχέση

$$T \sim \exp(-2aq_2),$$

ὅπου

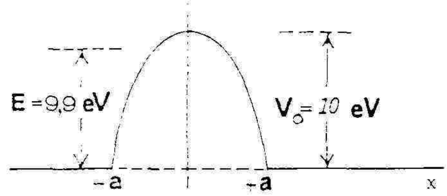
$$a = 5\,\text{Å} \quad \text{καί} \quad q_2 = \sqrt{\frac{2mc^2}{(\hbar c)^2}(V_2 - E)} = 1.98\ \text{Å}^{-1}$$

'Επομένως, ἡ ἐπί τοῖς ἑκατό πιθανότητα μετάδοσης ἀπό τήν περιοχή 1 στήν περιοχή 3 εἶναι τῆς τάξης τοῦ 10^{-7} %.

Παράδειγμα ΙΙ-36 Διάβαση παραβολικοῦ φραγμοῦ

Μιά δέσμη ἰόντων λιθίου μέ ἐνέργεια ἠρεμίας $mc^2 \approx 6.5$GeV, κινεῖται κατά τή διεύθυνση x μέ κινητική ἐνέργεια E=9.9eV καί προσπίπτει σ'ἕνα φραγμό δυναμικοῦ $V(x)$ μέ ὕψος V_0=10eV, ὁ ὁποῖος ἔχει παραβολικό σχῆμα. Στό σύστημα συντεταγμένων πού φαίνεται παρακάτω, ἔχουμε:

$$V(x)=\begin{cases} 0 & \text{ἄν} \quad x<-a \\ V_0\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right) & \text{ἄν} \quad -a<x<a \\ 0 & \text{ἄν} \quad x>a \end{cases}$$



α) Ἐκτιμῆστε προσεγγιστικά τό εὖρος 2a πού θά πρέπει νά ἔχει ὁ φραγμός (σέ μονάδες Å), ὥστε νά τόν διαπερνάει περίπου ἕνα ἰόν τῆς δέσμης στά χίλια.

β) Ἐξηγῆστε κάτω ἀπό ποιές συνθῆκες θά περιμένατε ἡ ἀνάλυση τοῦ (α) μέρους νά ἐφαρμόζεται γενικότερα, ἀνεξάρτητα ἀπό τό συγκεκριμένο σχῆμα τοῦ φραγμοῦ.

Λύση

α) Ἀφοῦ ὁ φραγμός δυναμικοῦ παριστάνεται ἀπό μιά ἄρτια συνάρτηση τοῦ x, ὁ συντελεστής μετάδοσης T δίνεται κατά προσέγγιση ἀπό τήν ἔκφραση

$$\ln T \simeq -4\int_0^{\alpha} dx\,\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\left[V(x)-E\right]},$$

ὅπου τό κλασικό σημεῖο ἀναστροφῆς α βρίσκεται ἀπό τή σχέση

$$E=V_0\left(1-\frac{\alpha^2}{a^2}\right) \quad \text{ἤ} \quad \alpha^2=a^2\left(1-\frac{E}{V_0}\right) \quad \text{ἤ} \quad \alpha=0.1a.$$

Ἐπομένως, ἔχουμε

$$\ln T \simeq -\frac{4}{a}\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx=-Qa^{*},$$

ὅπου

$$Q=\pi\left(1-\frac{E}{V_0}\right)\frac{(2mc^2V_0)^{\frac{1}{2}}}{\hbar c} \simeq 5.75\ \text{Å}^{-1}.$$

Ἄν θέλουμε ὁ συντελεστής μετάδοσης νά γίνει περίπου 1/1000, θά πρέπει

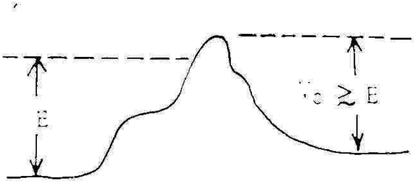
$$2a \simeq 2\,\frac{\ln 1000}{Q} \simeq 2.4\text{Å}.$$

β) Ἄν ἕνα σωματίδιο προσπίπτει σέ φραγμό δυναμικοῦ $V(x)$, πού παριστάνεται ἀπό μιά ὁμαλή συνάρτηση μέ ἕνα μέγιστο στό σημεῖο x=0 καί ἡ κινητική ἐνέργεια τοῦ σωματιδίου εἶναι μόλις μι-

---

* $\int_0^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx=\pi\alpha^2/4$.

κρότερη ἀπό αὐτό τό μέγιστο, εἶναι φανερό πώς ἐφαρμόζεται ἡ παραπάνω ἀνάλυση, σχετικά μέ τήν εὕρεση τοῦ συντελεστή μετάδοσης ἀπό τό φραγμό.



Πράγματι, ἄν ἡ $V(x)$ ἔχει μέγιστο στό σημεῖο $x=0$ θά ἔχουμε

$$V(x)=V(0)+\frac{1}{2}V''(0)\,x^2+\dots\quad (V''(0)<0).$$

Ἀπό τήν ἄλλη μεριά, ἄν ἡ κινητική ἐνέργεια E τοῦ σωματιδίου εἶναι ἀρκετά κοντά στή μέγιστη τιμή $V(0)$ τοῦ δυναμικοῦ, τά κλασικά σημεῖα ἀναστροφῆς μποροῦν νά βρίσκονται ἀρκετά κοντά στό $x=0$, ὥστε οἱ ὅροι τρίτου καί ἀνώτερου βαθμοῦ στό προηγούμενο ἀνάπτυγμα νά ἀμελοῦνται.

Παράδειγμα II-37 Ἡλικία τοῦ ἡλιακοῦ συστήματος

Γιά τά ἰσότοπα U^{235} καί U^{237} πού ἀπαντᾶμε στή φύση, οἱ ἀφθονίες εἶναι 0.71% καί 99.28%, ἀντίστοιχα καί οἱ χρόνοι ὑποδιπλασιασμοῦ εἶναι 7.1×10^8 ἔτη καί 4.5×10^9 ἔτη.

α) Οἱ ἀφθονίες πού δίνονται παραπάνω ἰσχύουν γιά ὅλα τά γήϊνα δείγματα καί γιά τούς μετεωρίτες πού προέρχονται ἀπό τό ἡλιακό σύστημα.

Δεῖξτε ὅτι ἡ παρατήρηση αὐτή ὑποστηρίζει τή θεωρία ὅτι ἡ γῆ σχηματίστηκε στήν ἴδια περίπου χρονική περίοδο μέ τό ὑπόλοιπο ἡλιακό σύστημα καί, ἄρα, δέν συμβιβάζεται μέ μία θεωρία κατά τήν ὁποία ὁ ἥλιος συνέλαβε τή γῆ μετά τό σχηματισμό του.

β) Ὑποθέστε, γιά ἀπλούστευση, ὅτι οἱ ἀρχικές ποσότητες τῶν δύο ἰσοτόπων τοῦ οὐρανίου στό ἡλιακό σύστημα ἦταν ἴσες. Πόση εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ ἡλιακοῦ συστήματος πού βρίσκετε;

Λύση

α) Ἄν N_1 καί N_2 εἶναι ἀντίστοιχα ὁ ἀριθμός τῶν ἀτόμων U^{235} καί U^{238} στή γή σήμερα καί N_{01} καί N_{02} ἦταν οἱ ἀντίστοιχοι ἀριθμοί πρίν ἀπό χρόνο T, τότε θά ἔχουμε προφανῶς ὅτι ὁ λόγος τῶν ἀφθονιῶν θά ἰσοῦται μέ

$$\frac{N_1}{N_2}=\frac{N_{01}}{N_{02}}\,\frac{e^{-\lambda_1 T}}{e^{-\lambda_2 T}}=\frac{N_{01}}{N_{02}}\,e^{(\lambda_2-\lambda_1)T} \qquad (1)$$

ὅπου λ εἶναι ἡ πιθανότητα διασπάσεως ἑνός πυρήνα ἀνά μονάδα χρόνου.

Ἀντίστοιχα γιά ἕνα μετεωρίτη μποροῦμε νά γράψουμε ὅτι

$$\frac{N_1'}{N_2'} = \frac{N_{01}'}{N_{02}'} e^{(\lambda_2-\lambda_1)T'} \qquad (2)$$

Σήμερα παρατηροῦμε ὅτι $N_1/N_2=N_1'/N_2'$. Ἄν $N_{01}/N_{02}\neq N_{01}'/N_{02}'$, θά ἔπρεπε οἱ χρόνοι T καί T' νά ἦσαν ἀκριβῶς ἐκεῖνοι πού χρειάζονται γιά νά γίνουν ἴσα τά δεύτερα μέλη τῶν (1) καί (2). Αὐτό ὅμως θά ἦταν πάρα πολύ ἀπίθανο. Ἡ πιό εὔλογη ἐξήγηση θά ἦταν ὅτι οἱ μετεωρίτες καί ἡ γῆ ἔχουν κοινή προέλευση καί ἡλικία, δηλαδή $N_{01}/N_{02}=N_{01}'/N_{02}'$ καί T=T'.

β) Ἔστω ὅτι ὁ ἀρχικός ἀριθμός πυρήνων U^{235} καί U^{238} στή γῆ ἦταν ὁ ἴδιος καί ἴσος μέ N_0 καί ὅτι T εἶναι ἡ ἡλικία τῆς γῆς. Ἡ (1) δίνει

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{(\lambda_2-\lambda_1)T}$$

Ἄν ὁ ὁλικός ἀριθμός πυρήνων οὐρανίου σήμερα εἶναι $N_{ολ}$, θά ἔχουμε

$$\frac{N_1/N_{ολ}}{N_2/N_{ολ}} = e^{(\lambda_2-\lambda_1)T} = \frac{0.71}{99.28} = 0.00715 \qquad (3)$$

Ἀλλά ὁ χρόνος ὑποδιπλασιασμοῦ τ συνδέεται μέ τήν πιθανότητα διασπάσεως ἑνός πυρήνα ἀνά μονάδα χρόνου, λ, μέ τή σχέση

$$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Ἄρα,

$$\lambda_2-\lambda_1 = \ln 2\left(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1}\right) = \ln 2\,\frac{\tau_1-\tau_2}{\tau_1\tau_2}$$

ὁπότε ἡ (3) δίνει γιά τήν ἡλικία τοῦ ἡλιακοῦ συστήματος

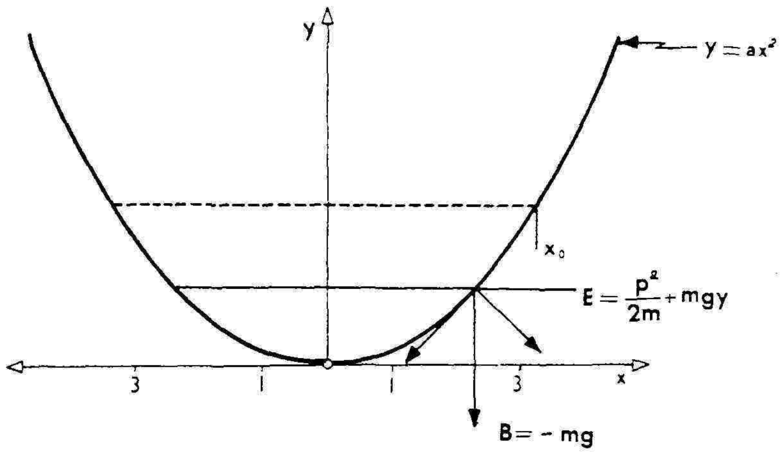
$$T = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\ln(0.00715) = \frac{\ln(0.00715)}{\ln 2}\,\frac{\tau_1\cdot\tau_2}{\tau_1-\tau_2} = 6.0\times 10^9 \text{ ἔτη.}$$

Παράδειγμα II-38

Ἕνα σωματίδιο μέ μάζα m κινεῖται χωρίς τριβές ἀπάνω στήν παραβολική ὁδηγό καμπύλη $y=ax^2$ ὑπό τήν ἐπίδραση τοῦ βάρους του, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα. Ὑποθέστε ὅτι ὁ ἄξονα y εἶναι κατακόρυφος.

α) Νά γραφεῖ ἡ ἐξαρτημένη καί ἡ μή ἐξαρτημένη ἀπό τό χρόνο ἐξίσωση Schrödinger.

β) Ἄν $a=5\times10^{26}\,m^{-1}$ νά βρεθεῖ ἡ ἐνέργεια τοῦ σωματιδίου στή θεμελιώδη κατάσταση.



Λύση

Ἐπειδή ἡ ἀντίδραση τῆς τροχιᾶς δέν παράγει ἔργο καί δέν ἔχουμε τριβές ἡ μεταβολή τῆς κινητικῆς ἐνέργειας ἀντισταθμίζεται τελείως ἀπό τήν ἀντίστοιχη μεταβολή τῆς δυναμικῆς ἐνέργειας ἐξαιτίας τῆς βαρύτητας, δηλαδή ἡ ποσότητα

$$E=\frac{p^2}{2m}+mgy$$

διατηρεῖται

Ἐπομένως

$$V(x)=mgy=mg\ ax^2$$

Ἡ ἐξίσωση Schrödinger πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό χρόνο γράφεται

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+mgax^2\psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$$

Γιά τήν ἐξίσωση Schrödinger πού δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τό χρόνο θά ἔχουμε

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+mgax^2\psi(x)=E\psi(x)$$

β) Ἡ παραπάνω μορφή τῆς ἐξίσωσης Schrödinger εἶναι ἡ ἴδια μέ αὐτή πού βρίσκουμε γιά ἕνα ἁπλό ἁρμονικό ταλαντωτή μέ σταθερά ἐλατηρίου k=2gam ἤ κυκλική συχνότητα $\omega_0=\sqrt{2ga}$.

Ξέρουμε ὅμως ὅτι ἡ ἐνέργεια τῆς θεμελιώδους καταστάσεως τοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτῆ εἶναι ἴση μέ $\hbar\omega_0/2$.

Ἄρα

$$E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega_0=\frac{1}{2}\hbar\sqrt{2ga}=\hbar\sqrt{\frac{ga}{2}}$$

ή $$E_0=3.3\times10^{-8}\,\text{MeV}=0.033\,\text{eV}\approx\frac{1}{30}\,\text{eV}.$$

Παράδειγμα II-39 Σωματίδιο σέ όρθογώνιο κουτί

Θεωρῆστε σωματίδιο μάζας m κλεισμένο μέσα σ ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο κουτί διαστάσεων a,b,c. Δεῖξτε ὅτι οἱ κυματοσυναρτήσεις τῶν στασίμων καταστάσεων ἔχουν τή μορφή $\psi(x,y,z)=D\sin k_1x\,\sin k_2y\,\sin k_3z$ καί βρεῖτε τίς δυνατές τιμές τῶν k_1,k_2,k_3 καί τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς ἐνέργειας E.

Λύση

Ἡ δυναμική ἐνέργεια τοῦ σωματιδίου μέσα στό κουτί εἶναι σταθερή (τήν ἐκλέγουμε ἴση μέ τό μηδέν) ἐνῶ ἀπειρίζεται στά τοιχώματα πού θεωροῦμε ἀδιαπέραστα. Ἡ χρονικά ἀνεξάρτητη ἐξίσωση Schrödinger σέ καρτεσιανές συντεταγμένες εἶναι

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(x,y,z)+V(x,y,z)\,\psi(x,y,z)=$$
$$=E\psi(x,y,z) \tag{1}$$

Ἀν γράψουμε:

$$\psi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z) \tag{2}$$

καί ἀντικαταστήσουμε στήν (1) παίρνουμε

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(YZ\frac{\partial^2X}{\partial x^2}+XZ\frac{\partial^2Y}{\partial y^2}+XY\frac{\partial^2Z}{\partial z^2}\right)=EXYZ \tag{3}$$

Διαιρώντας τά μέλη τῆς (3) μέ XYZ παίρνουμε:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=E \tag{4}$$

Ἐπειδή κάθε ὅρος τοῦ ἀριστεροῦ μέλους τῆς (4) ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό μιά μεταβλητή, μποροῦμε νά γράψουμε γιά κάθε μεταβλητή μιά ἐξίσωση τῆς μορφῆς

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2X}{dx^2}=E_iX,\qquad i=1,2,3 \tag{5}$$

ὅπου οἱ σταθερές E_1,E_2,E_3 θά ἱκανοποιοῦν τή σχέση:

$$E_1+E_2+E_3=E \tag{6}$$

Ἡ γενική λύση τῆς (5) εἶναι:

$$\psi_i(x)=Ae^{ik_i x}+Be^{-ik_i x}\ ,\qquad k_i=\frac{\sqrt{2mE_i}}{\hbar} \tag{7}$$

Ἀπό τό μονοδιάστατο πρόβλημα τοῦ σωματιδίου σέ φρέαρ δυναμικοῦ μέ τοιχώματα ἀπείρου ὕψους θυμόμαστε ὅτι ἡ κυματοσυνάρτηση μηδενίζεται στίς θέσεις τοῦ x ὅπου τό δυναμικό ἀπειρίζεται. Ἔτσι, ἀπό τήν

$$\psi_1(x)=0 \quad \text{γιά} \quad x=0$$

προκύπτει

$$A+B=0$$

ὁπότε

$$\psi_1(x)=C\sin k_1 x$$

Ἐπίσης ἀπό τήν

$$\psi_1(x)=0 \quad \text{γιά} \quad x=\alpha$$

προκύπτει ὅτι

$$k_1=\frac{l\pi}{\alpha} \quad l=1,2,\ldots$$

Ἀνάλογες σχέσεις ἰσχύουν γιά τίς ἄλλες δύο διαστάσεις. Ἔτσι γιά τήν ὁλική κυματοσυνάρτηση $\psi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$ παίρνουμε

$$\psi(x,y,z)=D\sin k_1x\cdot\sin k_2y\cdot\sin k_3z \tag{8}$$

ὅπου $$k_1=\frac{\sqrt{2mE_1}}{\hbar}=\frac{l\pi}{\alpha}\ ,\quad k_2=\frac{\sqrt{2mE_2}}{\hbar}=\frac{m\pi}{b}\ ,\quad k_3=\frac{\sqrt{2mE_3}}{\hbar}=\frac{n\pi}{c} \tag{9}$$

καί D τό γινόμενο τῶν πλατῶν τῶν μονοδιάστατων συναρτήσεων πού μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἀπό τή συνθήκη κανονικοποίησης

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^c \psi^*\psi\,dx\,dy\,dz=1$$

Τέλος, ἀπό τίς (6) καί (9) προκύπτει γιά τήν ὁλική ἐνέργεια

$$E_{lmn}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left[\frac{l^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right] \tag{10}$$

ὅπου l,m,n θετικοί ἀκέραιοι.

Παράδειγμα II-40

Σωματίδιο μέ μάζα m βρίσκεται σ'ένα μονοδιάστατο κουτί πάνω στόν ἄξονα x μεταξύ x=0 καί x=a. Μιά δεδομένη χρονική στιγμή ἡ κυματοσυνάρτηση τοῦ σωματιδίου εἶναι

$$\psi(x)\begin{cases}=A\sin\dfrac{2\pi x}{a} & \text{γιά}\quad 0<x<\dfrac{a}{2}\\[2mm] =0 & \text{γιά}\quad \dfrac{a}{2}<x<a\end{cases}$$

Ἄν τή χρονική αὐτή στιγμή γίνει μιά μέτρηση τῆς ἐνέργειας τοῦ σωματιδίου, ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα νά προκύψει ἡ τιμή $2\hbar^2\pi^2/ma^2$;

Λύση

Μιά ὁποιαδήποτε κυματοσυνάρτηση $\Psi(x)$ τοῦ σωματιδίου στό κουτί $0<x<a$ μπορεῖ νά ἐκφραστεῖ σάν γραμμική ὑπέρθεση τῶν κανονικοποιημένων κυματοσυναρτήσεων $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)\ldots$ τῶν στάσιμων καταστάσεων, ὅπου

$$\Phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Γράφουμε λοιπόν γενικά

$$\Psi(x)=c_1\Phi_1(x)+c_2\Phi_2(x)+c_3\Phi_3(x)+\cdots$$

Ἄν ἡ $\Phi(x)$ εἶναι κανονικοποιημένη οἱ συντελεστές $c_1, c_2, \ldots$ δίνονται ἀπό τά ὁλοκληρώματα

$$c_n=\int_0^a dx\ \Phi_n^*(x)\Psi(x)$$

ὅπως εἶναι γνωστό ἀπό τίς ἰδιότητες τῶν σειρῶν Fourier. Ἡ πιθανότητα, σέ μιά μέτρηση, νά βρεθεῖ τό σωματίδιο στή στάσιμη κατάσταση $\Phi_n(x)$ δηλ. νά ἔχει ἐνέργεια

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

εἶναι $|c_n|^2$. Ἡ τιμή $2\pi^2\hbar^2/ma^2$ πού μᾶς δόθηκε εἶναι ἡ E_2. Ἄρα πρέπει νά ὑπολογίσουμε τόν συντελεστή c_2. Ἔχουμε

$$c_2=\int_0^a dx\ \Phi_2(x)\psi(x)=A\sqrt{\frac{2}{a}}\int_0^{a/2} dx\ \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)=\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{2}}A$$

ὁπότε ἡ ζητούμενη πιθανότητα εἶναι $|c_2|^2=a|A|^2/8$.
Ἡ ποσότητα $|A|^2$ καθορίζεται ἀπό τή συνθήκη κανονικοποίησης τῆς $\psi(x)$:

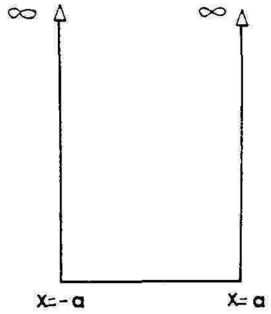
$$1=\int_0^a dx|\psi(x)|^2=|A|^2\int_0^{a/2}dx\ \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)=a|A|^2/4$$

δηλ. $|A|^2=4/a$. Ἄρα ἡ ζητούμενη πιθανότητα εἶναι 1/2.

Παράδειγμα ΙΙ-41

Δεῖξτε ὅτι γιά ἕνα σωματίδιο μέσα σέ μονοδιάστατο φρέαρ δυναμικοῦ ἄπειρου ὕψους καί πλάτους 2a, ἡ μέση τιμή τοῦ τετράγωνου τῆς συντεταγμένης θέσεως εἶναι

$$\overline{x^2}=\frac{a^2}{3}\left(1-\frac{6}{n^2\pi^2}\right)$$



ὅπου n ὁ κβαντικός ἀριθμός τῆς ἐνέργειας. Δεῖξτε ὅτι ἄν n>>1, τότε τό $\overline{x^2}$ τείνει στή κλασικά ἀναμενόμενη τιμή.

Λύση

Λύνοντας τή χρονικά ἀνεξάρτητη ἐξίσωση Schrodinger βρίσκουμε ὅτι οἱ κανονικοποιημένες κυματοσυναρτήσεις πού περιγράφουν τό σωματίδιο εἶναι

$$\psi_n(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{1}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{2a}\right), & n=2,4,6,\ldots\\ \sqrt{\frac{1}{a}}\cos\left(\frac{n\pi x}{2a}\right), & n=1,3,5,\ldots\end{cases}$$

Ἀφοῦ ἡ $\psi_n^*\,\psi_n$ δίνει τήν πυκνότητα πιθανότητας ἀνά μονάδα μήκους, ἡ μέση τιμή τοῦ x^2 θά εἶναι, γιά n ἄρτιο,

$$\overline{x^2}=\int_{-a}^{a}x^2\psi^*\psi\,dx=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}x^2\sin^2\left(\frac{n\pi x}{2a}\right)dx$$

$$=\frac{1}{a}\left(\frac{2a}{n\pi}\right)^3\int_{-\frac{n\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}}z^2\sin^2 z\,dz,\quad \text{ὅπου}\quad z=\frac{n\pi x}{2a}$$

Βρίσκουμε ὅτι

$$\int z^2\sin^2 z\,dz=\frac{z^3}{6}-\left(\frac{z^2}{4}-\frac{1}{8}\right)\sin 2z-\frac{z\cos 2z}{4}$$

ὁπότε

$$\overline{x^2}=\left[\frac{n^3\pi^3}{24}-\frac{n\pi}{4}\right]\frac{8a^2}{n^3\pi^3}=\frac{a^2}{3}\left(1-\frac{6}{n^2\pi^2}\right)$$

Ὅταν n>>1 προφανῶς ἔχουμε $\overline{x^2}\simeq\frac{a^2}{3}$.

Κλασικά ἡ πιθανότητα P ἀνά μονάδα μήκους νά βροῦμε τό σωματίδιο σέ ὁποιαδήποτε θέση μέσα στό φρέαρ εἶναι σταθερή. Ἄρα

$$P=\frac{1}{2a}$$

ἀφοῦ

$$\int_{-a}^{a} P\,dx=1$$

Κλασικά λοιπόν περιμένουμε

$$\overline{x^2}=\int_{-a}^{a} x^2 P\,dx=\frac{1}{2a}\cdot\frac{2a^3}{3}=\frac{a^2}{3}$$

πού συμπίπτει μέ τό κλασικό ὅριο τῆς κβαντομηχανικῆς τιμῆς.

Ἐντελῶς ἀνάλογα μποροῦμε νά ἐργαστοῦμε καί γιά τίς καταστάσεις πού περιγράφονται ἀπό κυματοσυναρτήσεις μέ n περιττό.

Παράδειγμα ΙΙ-42

Σωματίδιο μέ μάζα m βρίσκεται μέσα στό μονοδιάστατο κουτί $0<x<a$. Τή χρονική στιγμή t=0 ἡ κυματοσυνάρτηση του εἶναι

$$\varphi(x,0)=\frac{\psi_1(x)+\psi_2(x)}{\sqrt{2}}$$

ὅπου $\psi_n(x)$ ἡ κανονικοποιημένη κυματοσυνάρτηση τῆς στάσιμης κατάστασης μέ ἐνέργεια $n^2\pi^2\hbar^2/2ma^2$. Βρεῖτε τήν $\psi(x,t)$ γιά τυχόντα χρόνο t καί τήν ἀντίστοιχη μέση τιμή $\langle x\rangle$ τῆς συντεταγμένης x τοῦ σωματιδίου σάν συνάρτηση τοῦ χρόνου t.

Λύση

Ὅταν τό σωματίδιο βρίσκεται στήν στάσιμη κατάσταση μέ κυματοσυνάρτηση $\psi_1(x)$ ἔχει μιά συγκεκριμένη τιμή τῆς ἐνέργειας $E_1=\pi^2\hbar^2/2ma^2$ καί ἡ κυματοσυνάρτησή του τή χρονική στιγμή t εἶναι

$$\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}$$

Τό ἴδιο καί ἡ $\psi_2(x)$ τή χρονική στιγμή t εἶναι

$$\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}$$

Κατά συνέπεια ὁ γραμμικός συνδυασμός πού δίνεται σάν κυματοσυνάρτηση γιά t=0 ἔχει τή χρονική ἐξάρτηση

$$\varphi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}+\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}$$

Ἄν λάβουμε ὑπόψη ὅτι

$$\psi_1(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right), \qquad E_1=\pi^2\hbar^2/2ma^2$$

$$\psi_2(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right), \qquad E_2=2\pi^2\hbar^2/ma^2$$

εἶναι εὔκολο νά δείξουμε ὅτι ἡ παραπάνω $\varphi(x,t)$ ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωση Schrodinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} \qquad \text{γιά} \qquad 0<x<a.$$

'Επίσης ἡ $\varphi(x,t)$ εἶναι κανονικοποιημένη. Πραγματικά ἔχουμε

$$\int_0^a|\varphi(x,t)|^2dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

Ἄρα ἡ $|\varphi(x,t)|^2$ εἶναι ἡ πυκνότητα πιθανότητας νά βρεθεῖ τό σωματίδιο στό σημεῖο x τή χρονική στιγμή t. 'Επομένως ἡ μέση τιμή τοῦ x τή χρονική στιγμή t εἶναι

$$<x>=\int_0^a x|\varphi(x,t)|^2dx$$

$$=\int_0^a x\left|\frac{1}{\sqrt{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-iE_1t/\hbar}+\frac{1}{\sqrt{a}}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)e^{-iE_2t/\hbar}\right|^2dx$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^a x\left\{\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)+2\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\frac{2\pi x}{a}\cos\left(\frac{E_1-E_2}{\hbar}t\right)\right\}dx$$

$$=a\left[\frac{1}{2}-\frac{16}{9\pi^2}\cos\left(\frac{3\pi^2\hbar}{2ma^2}t\right)\right]$$

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι ἡ μέση τιμή τοῦ x (πού μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σάν ἡ συντεταγμένη τοῦ "κέντρου" τῆς κυματοδέσμης) κυμαίνεται κατά ἡμιτονοειδῆ τρόπο γύρω ἀπό τό μέσο τοῦ κουτιοῦ $x=a/2$. 'Η κυκλική συχνότητα τῆς χρονικῆς αὐτῆς μεταβολῆς εἶναι

$$\omega=\frac{E_2-E_1}{\hbar}=\frac{3\pi^2\hbar}{2ma^2}$$

καί ἀντιστοιχεῖ στή δ ι α φ ο ρ ά τῶν δύο ἐνεργειακῶν σταθμῶν

Σημ. 'Ο παραπάνω ὑπολογισμός ἐξηγεῖ, στά πλαίσια ἑνός ὑπεραπλουστευμένου παραδείγματος, τό λόγο γιατί ὅταν ἕνα ἠλεκτρόνιο σ'ένα άτομο μεταπηδᾶ ἀπό μιά ἐνεργειακή στάθμη E_i σέ μιάἄλλη E_j, ἐκπέμπει ἠλεκτρομαγνητική ἀκτινοβολία συχνότητας

$$\omega=\frac{E_i-E_j}{\hbar} \quad \text{(σχέση τοῦ Bohr)}$$

Μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ἡ κίνηση τοῦ ἠλεκτρονίου κατά τήν μετάπτωση ἀντιστοιχεῖ μέ τήν κίνηση ἑνός κλασικοῦ (δηλ. μή κβαντικοῦ) ἠλεκτρικά φορτισμένου σωματιδίου πού ταλαντώνεται μέ τήν παραπάνω συχνότητα καί ἑπομένως ἀκτινοβολεῖ ἠλεκτρομαγνητικό κύμα τῆς συχνότητας αὐτῆς.

Παράδειγμα II-43

Οἱ κανονικοποιημένες κυματοσυναρτήσεις τῶν 3 πρώτων στασίμων καταστάσεων (κατά αὔξουσα ἐνέργεια) ἑνός σωματιδίου μέ μάζα m κλεισμένου σ'ἕνα μονοδιάστατο κουτί μήκους a εἶναι $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ καί $\psi_3(x)$. Θεωρῆστε τήν κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x)=\frac{1}{2}\psi_1(x)+\frac{1}{2}\psi_2(x)+\rho\psi_3(x)$$

α) Ὑπολογίστε τόν ἀριθμητικό συντελεστή ρ ὥστε ἡ $\psi(x)$ νά εἶναι κανονικοποιημένη.

β) Ποιά εἶναι ἡ μέση τιμή τῆς ἐνέργειας τοῦ σωματιδίου ὅταν ἡ κυματοσυνάρτηση του εἶναι ἡ $\psi(x)$; Ποιά εἶναι ἡ τυπική ἀπόκλιση τῆς ἐνέργειας;

Λύση

α) Ἀφοῦ οἱ $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ καί $\psi_3(x)$ ἀνήκουν σέ τρεῖς διαφορετικές τιμές τῆς ἐνέργειας ἔχουμε

$$\int_0^a dx\ \psi_s^*(x)\psi_t(x)=1 \quad \text{ἄν} \quad s=t$$
$$=0 \quad \text{ἄν} \quad s\neq t$$

ὅπου ὑποθέσαμε ὅτι τό κουτί ἐκτείνεται ἀπό x=0 ὡς x=a.

Οἱ παραπάνω σχέσεις μᾶς ἐπιτρέπουν νά ὑπολογίσουμε τό ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^a dx\ \psi^*(x)\psi(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\rho^*\rho=\frac{1}{2}+\rho^*\rho.$$

Ὥστε γιά νά εἶναι ἡ $\psi(x)$ κανονικοποιημένη πρέπει νά διαλέξουμε τόν ρ ἔτσι ὥστε $\rho^*\rho=\frac{1}{2}$ ἤ $|\rho|=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ἄρα ὁ συντελεστής ρ μπορεῖ νά εἶναι ὁποιοσδήποτε ἀπό τούς μιγαδικούς ἀριθμούς μέ μέτρο $1/\sqrt{2}$ π.χ. $\rho=1/\sqrt{2}$ ἤ $-1/\sqrt{2}$ ἤ $i/\sqrt{2}$ κλπ. Ἡ γενική μορφή εἶναι προφανῶς

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\phi}$$

ὅπου ἡ φάση φ εἶναι αὐθαίρετη.

β) Ὅταν τό σωματίδιο βρίσκεται στήν κατάσταση μέ κυματοσυνάρτηση $\psi_1(x)$ ἔχει μιά ὁρισμένη ἐνέργεια $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$. Ἀντίστοιχα γιά τίς $\psi_2(x)$ καί $\psi_3(x)$ οἱ τιμές τῆς ἐνέργειας εἶναι $E_2 = \frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}$ καί $E_3 = \frac{9\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$.

Ὅταν τό σωματίδιο βρίσκεται στήν κατάσταση μέ κυματοσυνάρτηση $\psi(x)$ δέν εἶναι βέβαιο τό ἀποτέλεσμα μιᾶς μέτρησης τῆς ἐνέργειάς του δηλ. δέν μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι τό σωματίδιο ἔχει μιά ὡρισμένη ἐνέργεια. Τό μόνο πού μποροῦμε νά ποῦμε εἶναι ὅτι οἱ συντελεστές 1/2, 1/2 καί ρ εἶναι τά π λ ά τ η π ι θ α ν ό τ η τ α ς νά βρεθεῖ τό σωματίδιο στίς καταστάσεις πού χαρακτηρίζονται ἀντίστοιχα ἀπό τίς ψ_1, ψ_2 καί ψ_3. Τ ά τ ε τ ρ ά γ ω ν α τ ῶ ν μ έ τ ρ ω ν τῶν συντελεστῶν δηλ. 1/4, 1/4 καί $|\rho|^2 = \frac{1}{2}$ εἶναι οἱ πιθανότητες νά βρεθεῖ τό σωματίδιο στίς ἀντίστοιχες καταστάσεις, νά ἔχει δηλ. ἐνέργεια E_1, E_2 καί E_3 ἀντιστοίχως. Ἡ ἀναμενόμενη (δηλ. μέση) τιμή τῆς ἐνέργειας εἶναι λοιπόν

$$\langle E\rangle_\psi = \frac{1}{4}E_1 + \frac{1}{4}E_2 + \frac{1}{2}E_3 = 2.875\,\frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2}$$

Ἡ μέση τιμή τοῦ τετραγώνου τῆς ἐνέργειας εἶναι γιά τόν ἴδιο λόγο:

$$\langle E^2\rangle_\psi = \frac{1}{4}E_1^2 + \frac{1}{4}E_2^2 + \frac{1}{2}E_3^2 = 11.19\left(\frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2}\right)$$

Ἄρα ἡ τυπική ἀπόκλιση εἶναι

$$\sqrt{\langle E^2\rangle_\psi - \langle E\rangle_\psi^2} = 1.710\left(\frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2}\right)$$

Παράδειγμα ΙΙ-44

Σωματίδιο μέ μάζα m εἶναι περιορισμένο σ'ἕνα μονοδιάστατο κουτί μέ ἀδιαπέραστα τοιχώματα δηλ. σέ δυναμικό

$$V(x) = 0 \qquad 0 < x < a$$

$$V(x) = +\infty \qquad x < 0 \;\; ἤ \;\; x > a$$

Ἄν $\psi_n(x,t)$ εἶναι οἱ κανονικοποιημένες κυματοσυναρτήσεις γιά τίς στάσιμες καταστάσεις (n=1,2,3,... κατά αύξουσα ένέργεια) θεωρεῖστε τήν κατάσταση πού άντιστοιχεῖ στόν ἑξῆς γραμμικό συνδυασμό

$$\psi(x,t)=\frac{\sqrt{3}}{2}\psi_1(x,t)+\frac{1}{2}\psi_2(x,t)$$

α) Δεῖξτε ὅτι ἡ $\psi(x,t)$ εἶναι κανονικοποιημένη.

β) Βρεῖτε γιά τήν κατάσταση αὐτή τήν πιθανότητα νά βρίσκεται τό σωματίδιο στό διάστημα (0, a/2) συναρτήσει τοῦ χρόνου t.

Λύση

α) Οἱ κανονικοποιημένες κυματοσυναρτήσεις τῶν στάσιμων καταστάσεων εἶναι οἱ ἑξῆς:

$$\psi_n(x,t)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)e^{-iE_nt/\hbar} \qquad \text{ὅπου} \quad E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

Οἱ συναρτήσεις αὐτές ἱκανοποιοῦν σχέσεις "ὀρθογωνιότητας" δηλ. ἄν $n\neq n'$ τότε

$$\int_0^a dx\;\psi_n^*(x,t)\psi_{n'}(x,t)=0$$

Ἀπό τήν παραπάνω σχέση γιά n, n' ἴσα πρός 1 καί 2 εὔκολα βρίσκουμε

$$\int_0^a dx\,|\psi(x,t)|^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$$

ὥστε ἡ $\psi(x,t)$ εἶναι πράγματι κανονικοποιημένη.

β) Ἡ πυκνότητα τῆς πιθανότητας νά βρίσκεται τό σωματίδιο στό σημεῖο μέ συντεταγμένη x εἶναι

$$|\psi(x,t)|^2=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-iE_1t/\hbar}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)e^{-iE_2t/\hbar}\right|^2$$

$$=\frac{3}{2a}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)+\frac{1}{2a}\sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)+$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2a}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\left[e^{i(E_2-E_1)t/\hbar}+e^{-i(E_2-E_1)t/\hbar}\right]$$

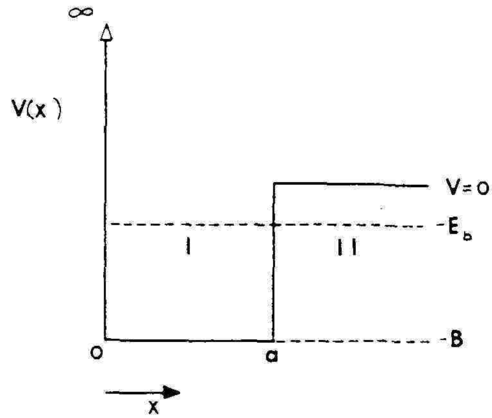
Ἐπομένως γιά νά βροῦμε τήν πιθανότητα νά βρίσκεται τό σωματίδιο στό ἀριστερό μισό τοῦ κουτιοῦ ὁλοκληρώνουμε τό $|\psi(x,t)|^2$ ἀπό 0 μέχρι a/2.

$$\int_0^{a/2} dx\,|\psi(x,t)|^2=\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}\pi}\cos\left(\frac{3\pi^2\hbar t}{2ma^2}\right)$$

Παράδειγμα II-45· Υπόδειγμα πυρήνα δευτερίου

Μερικές άπό τίς ίδιότητες τής άλληλεπιδράσεως νετρονίου-πρωτονίου μέσα στό δευτέριο μπορούν νά άναπαραχθούν σωστά μέ τό άπλό μονοδιάστατο δυναμικό τού παρακάτω σχήματος, όπου x είναι ή άπόσταση μεταξύ τών δύο νουκλεονίων.

Βρεϊτε τή συνθήκη πού πρέπει νά ίκανοποιεϊ τό εύρος a καί τό βάθος B τού δυναμικού αύτού γιά νά ύπάρχει άκριβώς μία δέσμια κατάσταση τού συστήματος πρωτονίου-νετρονίου.



Λύση

Έστω ότι τό σύστημα πρωτονίου-νετρονίου έχει ένέργεια $E=-E_b$ όταν σχηματίζει μιά δέσμια κατάσταση. Άφού $V(x)=0$ γιά $x>a$, θά είναι $E_b>0$.

Ή χρονικά άνεξάρτητη έξίσωση Schrödinger στήν περιοχή I γίνεται

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_I(x)-B\psi_I(x)=-E_b\psi_I(x) \qquad (1)$$

ή

$$\frac{d^2\psi_I(x)}{dx^2}+k^2\psi_I(x)=0, \quad k=\frac{\sqrt{2m(B-E_b)}}{\hbar} \qquad (2)$$

όπου m είναι ή άνηγμένη μάζα τού συστήματος νετρονίου-πρωτονίου. Ή γενική λύση τής (1) είναι

$$\psi_I(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx} \qquad (3)$$

Στήν περιοχή II (V=0) ή έξίσωση Schrödinger είναι,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_{II}(x)}{dx^2}=-E_b\psi_{II}(x)$$

ή

$$\frac{d^2\psi_{II}(x)}{dx^2}-q^2\psi_{II}(x)=0$$

όπου

$$q=\frac{\sqrt{2mE_b}}{\hbar}$$

μέ γενική λύση

$$\psi_{II}(x)=Ce^{+qx}+De^{-qx} \qquad (4)$$

Ξέρουμε ότι στίς θέσεις όπου τό δυναμικό γίνεται $+\infty$ ή κυματοσυνάρτηση πρέπει νά μηδενίζεται. Ἄρα γιά $x=0$ ή (3) δίνει

$$A+B=0$$

ὁπότε

$$\psi_{I}(x)=2iA\sin kx, \qquad 0<x\leqslant a$$

Ἐπειδή γιά $x\longrightarrow\infty$ ή $\psi_{II}(x)$ πρέπει νά μηδενίζεται, θέτουμε

$$C=0$$

δηλαδή

$$\psi_{II}(x)=De^{-qx} \qquad \text{γιά} \quad x\geqslant a.$$

Ἡ συνέχεια τῆς ψ καί τῆς $\frac{d\psi}{dx}$ στό $x=a$ ὁδηγεῖ στίς σχέσεις

$$2iA\sin ka=De^{-qa}$$

$$2iAk\cos ka=-Dqe^{-qa}$$

ἀπό τίς ὁποῖες προκύπτει ὅτι

$$\cot ka=-\frac{q}{k}$$

ή

$$\frac{\sqrt{2m(B-E_b)}}{\hbar}\cot\left(a\frac{\sqrt{2m(B-E_b)}}{\hbar}\right)=-\frac{\sqrt{2mE_b}}{\hbar} \tag{5}$$

Ἡ (5) εἶναι ὑπερβατική ἐξίσωση, ἀλλά μπορεῖ νά λυθεῖ γραφικά. Ἄν θέσουμε

$$z=\frac{a\sqrt{2m(B-E_b)}}{\hbar} \tag{6}$$

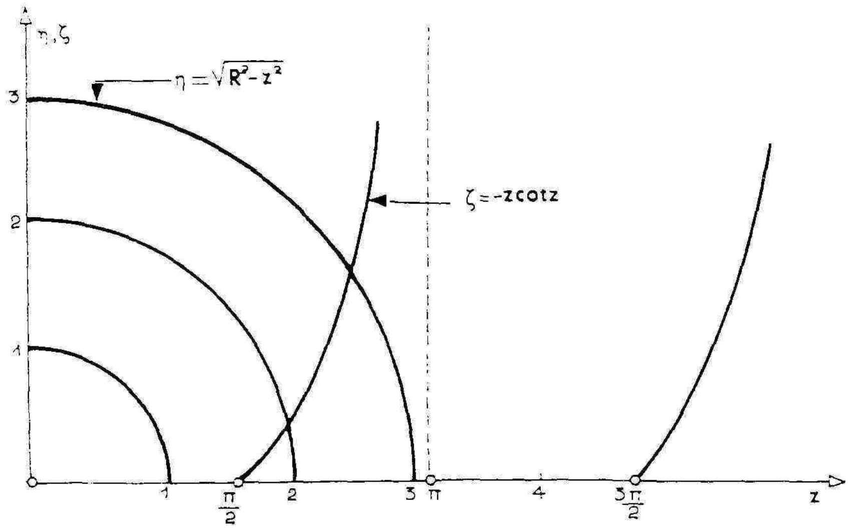
ή (5) γίνεται

$$-z\cot z=\sqrt{R^2-z^2} \tag{7}$$

ὅπου

$$R^2=\frac{2mBa^2}{\hbar^2}$$

Οἱ ἐνέργειες $E<0$ γιά τίς δέσμιες καταστάσεις βρίσκονται ἀπό τίς τιμές τοῦ z γιά τίς ὁποῖες ή καμπύλη $\zeta=-z\cot z$ τέμνει τό τεταρτημόριο περιφέρειας κύκλου μέ ἀκτίνα R πού παριστάνει τό δεξιό μέλος τῆς (7). Ἐπειδή ή $\cot z$ μηδενίζεται γιά $\pi/2$, $3\pi/2$, κλπ. προκύπτει ὅτι γιά νά τέμνει ή περιφέρεια $\eta=\sqrt{R^2-z^2}$ τή συνάρτηση $\zeta=-z\cot z$, θά πρέπει ή ἀκτίνα R νά ἱκανοποιεῖ τή σχέση $\frac{\pi}{2}\leqslant R$. Ἄρα, τό σύστημα πρωτονίου-νετρονίου θά ἔχει ἀκριβῶς μία δέσμια κατάσταση μόνο ἄν τό βάθος B τοῦ δυναμικοῦ καί τό πλάτος του a ἱκανοποιοῦν τή σχέση



$$\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\sqrt{2mB}}{\hbar} a < \frac{3\pi}{2} \qquad (8)$$

Ἂν συνέβαινε $R < \frac{\pi}{2}$, τό ἰσότοπο δευτέριο δέν θά ὑπῆρχε στή φύση.

Σημείωση: Τά πειραματικά δεδομένα γιά τό δευτέριο εἶναι a=1.85F (1F=10^{-15}m) καί B=41.6 MeV. Ἂν λύσουμε γραφικά τήν ἐξίσωση (7) μέ τόν τρόπο πού ὑποδείχθηκε, βρίσκουμε ὅτι τό δευτερόνιο ἔχει ἀκριβῶς μία δέσμια κατάσταση καί ὅτι ἡ ἐνέργεια συνδέσεως E_b γι'αὐτή τή κατάσταση εἶναι 2.15 MeV. Αὐτό ἀποτελεῖ πολύ καλή προσέγγιση ἄν συγκριθεῖ μέ τήν πειραματική τιμή τῶν 2.21 MeV.

Παράδειγμα ΙΙ-46 Θεμελιώδης κατάσταση τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου

Ἡ κυματοσυνάρτηση πού περιγράφει τή θεμελιώδη κατάσταση τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου ἔχει τή μορφή

$$\varphi(r)=Ae^{-\lambda r} \qquad \text{ὅπου} \qquad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

καί A, λ εἶναι σταθερές.
Ὑπολογίστε τήν παράμετρο λ καί βρεῖτε τήν ὁλική ἐνέργεια E τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου στή θεμελιώδη κατάσταση.

Λύση

Έχουμε ότι,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = A\frac{\partial}{\partial x}e^{-\lambda\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -A\frac{x}{r}e^{-\lambda r} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = A\left\{-\frac{\lambda}{r} + \frac{(\lambda x)x}{r^3} + \left(\frac{-\lambda x}{r}\right)^2\right\}e^{-\lambda r}$$

$$= A\left(-\frac{\lambda}{r} + \frac{\lambda x^2}{r^3} + \frac{\lambda^2 x^2}{r^2}\right)e^{-\lambda r} \qquad (2)$$

Οἱ ἐκφράσεις τῶν $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ καί $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ βρίσκονται ἀπό τήν (2) ἄν ἀντικαταστήσουμε τό x μέ τό y ἤ τό z ἀντίστοιχα. Ἐπομένως,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = A\left\{-\frac{3\lambda}{r} + \frac{\lambda(x^2+y^2+z^2)}{r^3} + \frac{\lambda^2(x^2+y^2+z^2)}{r^2}\right\}e^{-\lambda r}$$

$$= A\left(-\frac{3\lambda}{r} + \frac{\lambda}{r} + \lambda^2\right)e^{-\lambda r} = A\left(-\frac{2\lambda}{r} + \lambda^2\right)e^{-\lambda r}$$

ὁπότε ἡ ἐξίσωση Schrödinger δίνει τή σχέση

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{2\lambda}{r} + \lambda^2\right)e^{-\lambda r} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}e^{-\lambda r} = Ee^{-\lambda r}$$

Ἀνακατατάσσοντας τούς ὅρους παίρνουμε τή σχέση

$$\left(\frac{\hbar^2}{m}\lambda - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r} = \left(E + \frac{\hbar^2}{2m}\lambda^2\right)$$

πού πρέπει νά ἀληθεύει γιά ὅλες τίς τιμές τοῦ r.

Ἀπό αὐτή βρίσκουμε τίς ζητούμενες τιμές γιά τήν παράμετρο λ καί τήν ὁλική ἐνέργεια τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου γιά τή θεμελιώδη στάθμη:

$$\lambda = \frac{me^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2} \quad \text{καί} \quad E = -\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2$$

Παράδειγμα II-47 Positronium

Κάτω ἀπό ὁρισμένες συνθῆκες ἕνα ἠλεκτρόνιο καί ἕνα ποζιτρόνιο σχηματίζουν μιά δέσμια κατάσταση γνωστή μέ τό ὄνομα positronium. Ἡ κατάσταση αὐτή μοιάζει μέ τό ἄτομο τοῦ ὑδρογόνου στό ὁποῖο τό ἠλεκτρόνιο καί τό πρωτόνιο περιστρέφονται γύρω ἀπό τό κέντρο μάζας τους, ἐπειδή ὅμως οἱ μάζες τοῦ ἠλεκτρονίου καί τοῦ ποζιτρονίου εἶναι ἴσες δέν μπορεῖ νά ἀμεληθεῖ ἡ κίνηση τοῦ ποζιτρονίου.

α) Ὑπολογίστε τίς ἐνεργειακές στάθμες τοῦ συστήματος.

β) Ποιό εἶναι τό μῆκος κύματος λ τῆς ἀκτινοβολίας πού ἐκπέμπεται ὅταν τό σύστημα μεταπίπτει ἀπό τήν πρώτη διεγερμένη στή θεμελιώδη κατάσταση;

Λύση

Τό σύστημα δύο σωμάτων m_1 καί m_2 πού περιστρέφονται γύρω ἀπό τό κέντρο βάρους τους εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό σύστημα κατά τό ὁποῖο ἕνα σῶμα μέ ἀνηγμένη μάζα

$$m_r = \frac{m_1}{1+\dfrac{m_1}{m_2}}$$

περιστρέφεται γύρω ἀπό σταθερό σημεῖο. Γιά τό ἄτομο τοῦ ὑδρογόνου

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_e}{m_p} \approx \frac{1}{1836}$$

καί

$$m_r \approx m_e$$

Γιά τό σύστημα ἠλεκτρονίου - ποζιτρονίου

$$m_r = \frac{m_{e^-}}{1+\dfrac{m_{e^-}}{m_{e^+}}} = \frac{m_e}{2}$$

α) Οἱ ἐνεργειακές στάθμες E_e, γιά τό ἄτομο τοῦ ὑδρογόνου δίνονται ἀπό τή σχέση

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2(4\pi\varepsilon_0)^2}\,\frac{1}{n^2}, \quad n=1,2,3,\ldots$$

Γιά νά βροῦμε τίς ἀντίστοιχες στάθμες γιά τό σύστημα ἠλεκτρονίου-ποζιτρονίου ἀντικαθιστοῦμε τό m_e μέ $m_r = \frac{m_e}{2}$ καί βρίσκουμε

$$E_n^{(p)} = -\frac{me^4}{4\hbar^2(4\pi\varepsilon_0)^2}\,\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\,E_n$$

β) Ἡ ἐνέργεια τῆς θεμελιώδους κατάστασης θά εἶναι ἴση μέ

$$E_1^{(p)} = \frac{1}{2}E_1 = -\ 6.76\ \text{eV}$$

Τό μῆκος κύματος λ τῆς ἀκτινοβολίας πού ἐκπέμπεται βρίσκεται ἀπό τή γνωστή σχέση πού συνδέει τή συχνότητα ν τῆς ἐκπεμπόμενης ἀκτινοβολίας μέ τή διαφορά ΔE τῶν ἐνεργειακῶν σταθμῶν μεταξύ τῶν ὁποίων γίνεται ἡ μετάπτωση

$$h\nu=\Delta E$$

ἤ

$$h\nu=\frac{hc}{\lambda}=E_2-E_1=-\frac{3}{4}E_1$$

ἤ

$$\lambda=-\frac{4}{3}\frac{hc}{E_1}=\frac{4}{3}\frac{1.24\times 10^{-12}\,\mathrm{MeV\ m}}{6.76\times 10^{-6}\ \mathrm{MeV}}$$

ἤ

$$\lambda=2.445\times 10^{-7}\mathrm{m}=2445\ \mathrm{\mathring{A}}$$

πού βρίσκεται στήν ὑπεριώδη περιοχή.

Παράδειγμα II-48

Σωματίδιο μέ σπίν μηδέν βρίσκεται μέσα σέ δυναμικό πού ἔχει σφαιρική συμμετρία ὡς πρός τήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων. Μιά ἀπό τίς στάσιμες καταστάσεις τοῦ σωματιδίου ἔχει κυματοσυνάρτηση τῆς μορφῆς

$$\psi(x,y,z)\equiv(x^2-y^2)f(r)\qquad \text{ὅπου}\qquad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Ἄν δίνεται ἡ $f(r)$, βρεῖτε ὅσες περισσότερες γραμμικά ἀνεξάρτητες κυματοσυναρτήσεις μπορεῖτε, πού νά ἀντιστοιχοῦν σέ στάσιμες καταστάσεις πού ἔχουν τήν ἴδια ἐνέργεια μέ τήν παραπάνω κυματοσυνάρτηση $\psi(x,y,z)$.

Λύση

Ἀφοῦ ὑπάρχει σφαιρική συμμετρία, δέν πρέπει νά ὑπάρχει διάκριση μεταξύ τῶν ἀξόνων συντεταγμένων δηλ. ἄν ἡ $(x^2-y^2)f(r)$ ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση Schrodinger μέ κεντρικό δυναμικό $V(r)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)+V(r)\psi=E\psi$$

γιά μιά τιμή τῆς ἐνέργειας E τότε καί οἱ $(y^2-z^2)f(r)$ καί $(z^2-x^2)f(r)$ θά τήν ἱκανοποιοῦν γιά τήν ἴδια τιμή τῆς ἐνέργειας E. Ἐπειδή τό ἄθροισμα τῶν παραπάνω τριῶν κυματοσυναρτήσεων μηδενίζεται, ἔχουμε βρεῖ συνολικά μόνο δ ύ ο γραμμικά ἀνεξάρτητες π.χ. τίς

$$(x^2-y^2)f(r)\quad \text{καί}\quad (y^2-z^2)f(r)$$

Ὑπάρχουν ὅμως κι'ἄλλες. Ἄν κάνουμε μιά στροφή π.χ. κατά 45° τῶν ἀξόνων x καί y στό ἐπίπεδό τους, μιά ὡρισμένη κυματοσυνάρτηση ἀλλάζει μορφή ἔτσι ὥστε ἡ νέα κυματοσυνάρτηση νά προκύπτει ἀπό τήν παληά μέ τήν ἀντικατάσταση

$$x \longrightarrow \frac{x+y}{\sqrt{2}} \quad \text{καί} \quad y \longrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{2}}$$

Μ'αὐτόν τόν τρόπο ἡ $(x^2-y^2)f(r)$ δίνει

$$\left[\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2\right]f(r)=2xy\,f(r)$$

Ἄρα καί ἡ $xy\ f(r)$ πρέπει νά ἱκανοποιεῖ τήν παραπάνω ἐξίσωση Schrodinger γιά τήν ἴδια τιμή τῆς ἐνέργειας Ε. Ἀπ'αὐτήν προκύπτουν καί οἱ $yzf(r)$ καί $zxf(r)$ ἀφοῦ δέν ὑπάρχει διάκριση μεταξύ τῶν ἀξόνων. Ἔχουμε λοιπόν τίς ἑξῆς 5 γραμμικά ἀνεξάρτητες κυματοσυναρτήσεις γιά τήν ἴ δ ι α τιμή τῆς ἐνέργειας

$$(x^2-y^2)f(r), \quad (y^2-z^2)f(r), \quad xyf(r), \quad yzf(r), \quad zxf(r)$$

Μποροῦν νά προκύψουν καί ἄλλες ἄν χρησιμοποιήσουμε ἄλλου εἴδους στροφές κλπ.; Ἡ ἀπάντηση εἶναι ὄχι. Πράγματι γιά ὁποιαδήποτε στροφή τῶν ἀξόνων ὁ ἀντίστοιχος μετασχηματισμός τῶν συντεταγμένων x,y,z εἶναι γραμμικός καί ὁμογενής. Ἑπομένως ἕνα ὁμογενές πολυώνυμο 2ου βαθμοῦ ὅπως τά x^2-y^2, y^2-z^2 κλπ. παραμένει ὁμογενές πολυώνυμο 2ου βαθμοῦ. Ἀλλά τέτοια πολυώνυμα τῶν τριῶν μεταβλητῶν x,y καί z πού νά εἶναι γραμμικά ἀνεξάρτητα ὑπάρχουν ἀκριβῶς 6. Μποροῦμε νά θεωρήσουμε π.χ. τά πολυώνυμα

$$x^2, \quad y^2, \quad z^2, \quad xy, \quad yz, \quad zy$$

ἤ τά $\qquad x^2-y^2, \quad y^2-z^2, \quad xy, \quad yz, \quad zy$ καί $x^2+y^2+z^2$

Ἐπειδή ὅμως τό τελευταῖο πολυώνυμο $x^2+y^2+z^2$ ἰσοῦται μέ r^2 καί εἶναι ἀ ν α λ λ ο ί ω τ ο ὡς πρός στροφές τῶν ἀξόνων προφανῶς εἶναι ἀδύνατο νά προκύψει ἀπό στροφές καί γραμμικούς συνδυασμούς τῶν πέντε πρώτων. Ἄρα τό σύστημα τῶν πέντε πρώτων πολυωνύμων εἶναι "κλειστό" ὡς πρός στροφές καί γραμμικούς συνδυασμούς.

Σημείωση: Μπορεῖ νά δειχτεῖ ὅτι οἱ παραπάνω 5 κυματοσυναρτήσεις ἀντιστοιχοῦν σέ καταστάσεις τοῦ σωματιδίου μέ τό ἴδιο μέτρο στροφορμῆς καί διαφέρουν μόνο ὡς πρός τόν προσανατολισμό τῆς στροφορμῆς.

Παράδειγμα ΙΙ-49

Ἐπαναλάβετε τό προηγούμενο πρόβλημα ἄν ἡ κυματοσυνάρτηση μιᾶς ἀπό τίς στάσιμες καταστάσεις ἔχει τή μορφή

$$\psi(x,y,z)=zf(r) \qquad \text{ὅπου} \quad r=\sqrt{x+y^2+z^2}$$

Λύση

Ἀπό τή σφαιρική συμμετρία τοῦ δυναμικοῦ προκύπτει ὅτι δέν ὑπάρχει προτίμηση γιά καμμιά κατεύθυνση στό χῶρο. Ἄρα καί οἱ $xf(r)$, $yf(r)$ εἶναι κυματοσυναρτήσεις καταστάσεων γιά τήν ἴδια ἐνέργεια ὅπως καί ἡ $zf(r)$. Συνολικά λοιπόν ἔχουμε τρεῖς γραμμικά ἀνεξάρτητες κυματοσυναρτήσεις:

$$xf(r),\ yf(r) \quad \text{καί} \quad zf(r)$$

Κάθε ἄλλη κυματοσυνάρτηση πού προκύπτει ἀπό τήν ἐκλογή ἑνός τυχόντα ἄξονα κατά τήν κατεύθυνση τοῦ μοναδιαίου διανύσματος $\vec{n}$, δηλ. ἡ $(\vec{r}\cdot\vec{n})f(r)$ εἶναι γραμμικός συνδιασμός τῶν παραπάνω τριῶν ἀφοῦ αὐτή ἡ κυματοσυνάρτηση μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γραμμικός συνδυασμός

$$(\vec{r}\cdot\vec{n})f(r)=n_x xf(r)+n_y yf(r)+n_z zf(r)$$

Παράδειγμα ΙΙ-50 Θεμελιώδης στάθμη τοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτῆ

Δίνεται ὅτι ἡ κυματική συνάρτηση πού περιγράφει τή θεμελιώδη κατάσταση ἑνός γραμμικοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτῆ μέ μάζα m καί κλασική "σταθερά ἐλατηρίου" K ἔχει τή μορφή $\psi(x)=A\exp(-\alpha x^2)$.

α) Προσδιορίστε τίς (πραγματικές) σταθερές A,α καθώς καί τήν ἐνέργεια E_0 τῆς θεμελιώδους κατάστασης τοῦ ταλαντωτῆ.

β) Πόση θά ἦταν ἡ ἐνέργεια E_0 κατά τήν κλασική Φυσική; Μέ ποιά θεμελιώδη ἀρχή τῆς Κβαντικῆς Μηχανικῆς ἀντιφάσκει ἡ κλασική τιμή τῆς E_0 καί γιατί;

Λύση

α) Θεωροῦμε τήν (ἀνεξάρτητη ἀπό τό χρόνο) ἐξίσωση Schrödinger γιά τό γραμμικό ἁρμονικό ταλαντωτῆ, δηλ.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)+\frac{1}{2}Kx^2\psi(x)=E\psi(x).$$

Ἀφοῦ δίνεται ἡ κυματοσυνάρτηση τῆς βασικῆς κατάστασης,

$$\psi(x)=Ae^{-\alpha x^2}, \qquad \text{ὁπότε} \qquad \psi''(x)=A(-2\alpha+4\alpha^2x^2)e^{-\alpha x^2},$$

θά ἰσχύει ἡ παρακάτω ταυτοτική σχέση

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-2\alpha+4\alpha^2x^2)+\frac{1}{2}Kx^2 \equiv E_0,$$

πού μᾶς δίνει

$$\frac{2\alpha^2\hbar^2}{m}=\frac{1}{2}K \quad \text{ἤ} \quad \alpha=\frac{(mK)^{\frac{1}{2}}}{2\hbar}$$

$$E_0=\alpha\frac{\hbar^2}{m} \quad \text{ἤ} \quad E_0=\frac{1}{2}\hbar\left(\frac{K}{m}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

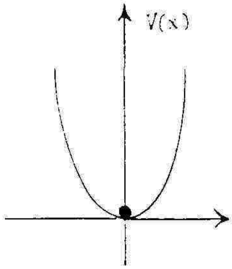
Γιά τήν εὕρεση τῆς σταθερᾶς A παρατηροῦμε ὅτι ἡ δοσμένη κυματοσυνάρτηση $\psi(x)$ θά πρέπει νά εἶναι κανονικοποιημένη (ἀφοῦ ὁ ταλαντωτής βρίσκεται ὁπωσδήποτε κάπου πάνω στόν ἄξονα x). Ἐπομένως θά ἰσχύει

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2dx=A^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\alpha x^2}dx=A^2\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}\,{}^{*},$$

ἄρα

$$A=\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{\sqrt{mK}}{\pi^2\hbar^2}\right)^{\frac{1}{8}}.$$

β) Ἡ ἐλάχιστη κλασική τιμή τῆς ἐνέργειας ἑνός ἁρμονικοῦ ταλαντωτῆ εἶναι προφανῶς ἡ $E_0=0$. Αὐτή ἀντιστοιχεῖ σ'ἕναν ἀκίνητο ἁρμονικό ταλαντωτή (στόν πυθμένα τοῦ πηγαδιοῦ $V(x)=\frac{1}{2}Kx^2$ στή θέση $x=0$). Παρατηροῦμε ὅτι μιά τέτοια κατάσταση εἶναι κβαντομηχανικά ἀπαράδεκτη, ἀφοῦ σ'αὐτή γνωρίζουμε ἀκριβῶς καί τή θέση ($x=0$) καί τήν ὁρμή ($p=0$) τοῦ ταλαντωτῆ καί δέν ἱκανοποιεῖται ἡ Ἀρχή τῆς Ἀβεβαιότητας τοῦ Heisenberg. Ἡ ἐλάχιστη τιμή τῆς ἐνέργειας ἑνός κβαντικοῦ ἁρμονικοῦ ταλαντωτῆ εἶναι αὐτή πού βρήκαμε στό (α) ἐρώτημα ("ἐνέργεια ἀπολύτου μηδενός").



Παράδειγμα II-51

Ὑποθέτουμε ὅτι τό ἐνεργό ἐνδομοριακό δυναμικό, πού ἀναπαράγει τίς χαμηλές στάθμες ταλάντωσης ἑνός διατομικοῦ μόριου, ἔχει τή μορφή

$$V(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}Kx^2 & \text{ἄν } x>0\\ 8Kx^2 & \text{ἄν } x<0\end{cases}$$

* $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta x^2}dx=\sqrt{\pi/\beta}$