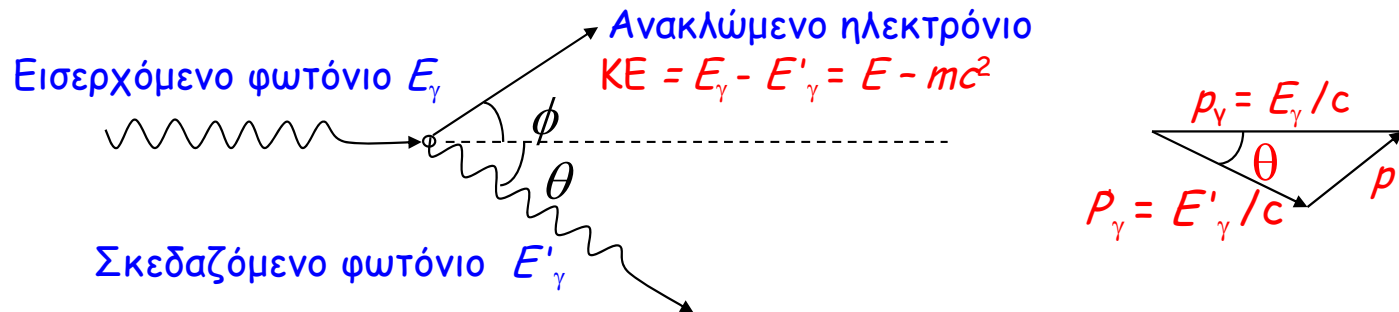


## Σκέδαση Compton

- Το φαινόμενο Compton περιγράφει τη σκέδαση ενός φωτονίου από ένα ελεύθερο ατομικό ηλεκτρόνιο:  $\gamma + e \rightarrow \gamma' + e'$ .
- Το φωτόνιο δεν εξαφανίζεται μετά τη σκέδαση αλλά αλλάζει κατεύθυνση και ενέργεια.
- Το φωτόνιο μεταφέρει μέρος της ενέργειας του στο ηλεκτρόνιο το οποίο μετά τη σκέδαση ονομάζεται «ανακλώμενο ηλεκτρόνιο» (recoil electron).



Διατήρηση ορμής και ενέργειας:

$$(pc)^2 = (E_\gamma)^2 + (E'_\gamma)^2 - 2E_\gamma E'_\gamma \cos\theta = E^2 - m^2c^4$$

Επίσης,  $T = E_\gamma - E'_\gamma = E - mc^2$

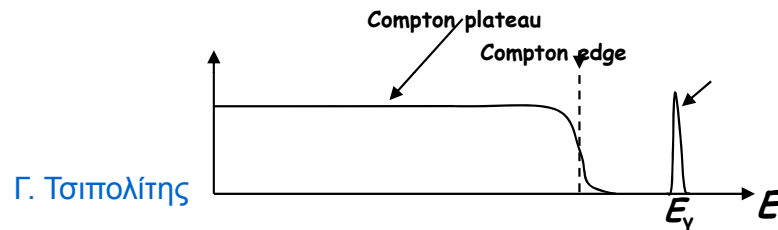
Γ. Τσιπολίτης

Η ενέργεια του σκεδαζόμενου φωτονίου ως συνάρτηση της γωνίας σκέδασης είναι:

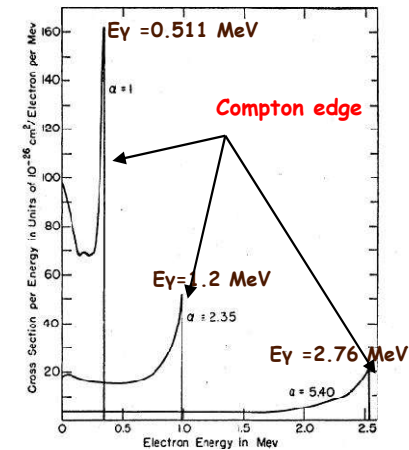
$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{mc^2}} (1 - \cos\theta)$$

## Σκέδαση Compton

- κινητική ενέργεια,  $T$ , ανακλώμενου ηλεκτρονίου:
 
$$T = E_\gamma - E'_\gamma = E_\gamma \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{E_\gamma}{mc^2} (1 - \cos\theta)} \right)$$
- $T = E_\gamma - E'_\gamma$  πάντα μικρότερη της  $E_\gamma$
- $T$  Μέγιστη όταν  $E'_\gamma =$  ελάχιστη ( $\theta = 180^\circ$ )  $\rightarrow$  "Compton Edge"
- $T$  Ελάχιστη όταν  $E'_\gamma =$  μέγιστη ( $\theta = 0^\circ$ )
- Αν το σκεδαζόμενο φωτόνιο διαφύγει χωρίς απώλεια ενέργειας  $\rightarrow$  συνεχές φάσμα ενέργειας (**Compton plateau**)
- οι ακτίνες- $\gamma$  μπορούν να σκεδαστούν περισσότερες φορές  $\rightarrow$  εναποθέτουν ενέργεια
- Αν το σκεδαζόμενο φωτόνιο υποστεί φωτοηλεκτρικό φαινόμενο  $\rightarrow$  όλη η ενέργεια εναποτίθεται (full-energy peak).



$$T_{\max} = \frac{2E_\gamma^2}{mc^2 \left( 1 + \frac{2E_\gamma}{mc^2} \right)}$$



## Σκέδαση Compton

- Η γωνιακή κατανομή των σκεδαζόμενων φωτονίων → σχέση *Klein-Nishina*. Η διαφορική ενεργός διατομή έχει τη μορφή:

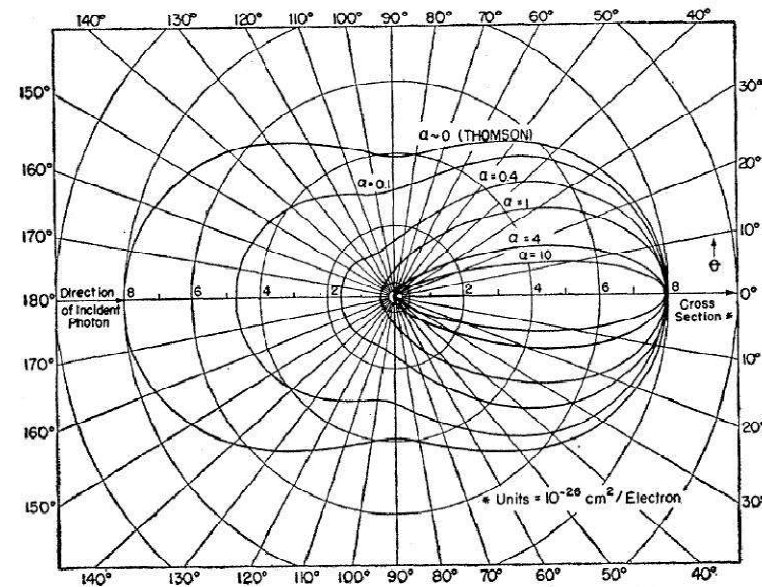
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Zr_e^2 \left( \frac{1}{1 + a(1 - \cos\theta)} \right)^2 \left( \frac{1 + \cos^2\theta}{2} \right) \left( 1 + \frac{a^2(1 - \cos\theta)^2}{(1 + \cos^2\theta)[1 + a(1 - \cos\theta)]} \right)$$

όπου  $a = E_\gamma / mc^2$  &  $r_e =$  κλασική ακτίνα ηλεκτρονίου

- Διάγραμμα σε πολικές συντεταγμένες του αριθμού των φωτονίων σκεδάζονται σε γωνία  $\theta$ .

- Φαίνονται οι ισο-ενεργειακές γραμμές ως συνάρτηση της αρχικής ενέργειας των εισερχομένων φωτονίων.

- Για μεγάλες ενέργειες φωτονίου παρατηρούμε ότι σκεδάζονται προς τα μπρος.



Γ. Τσιπολίτης

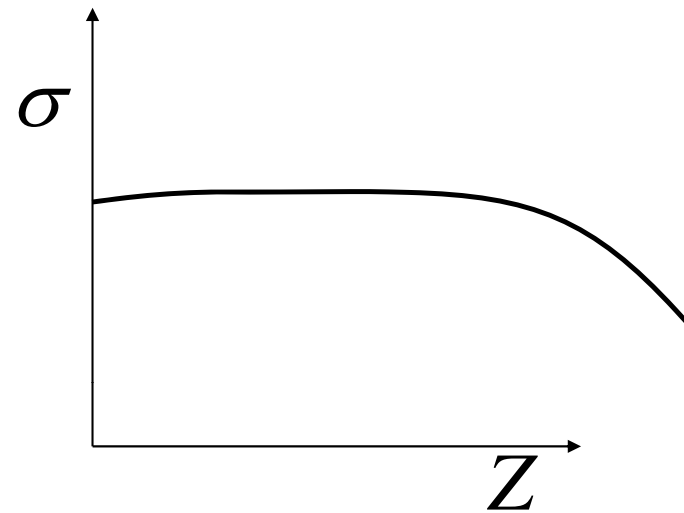
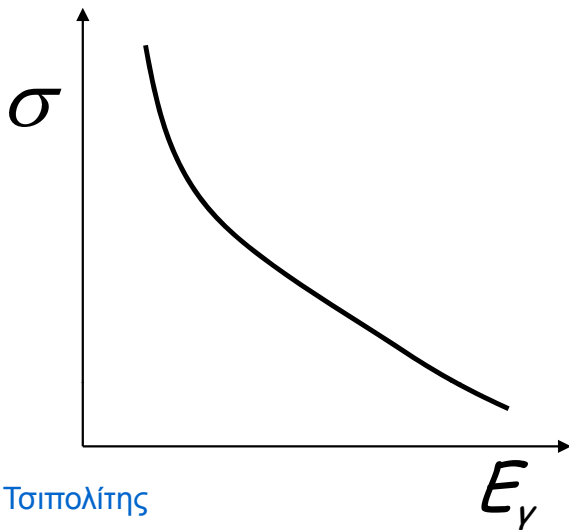
## Σκέδαση Compton

- ολική ενεργός διατομή - συντελεστής απορρόφησης Compton

$$\sigma \sim \rho \frac{N_A}{A} Z f(E_\gamma) \rightarrow \sim \rho \frac{N_A}{A} \left( \frac{A}{2} \right) f(E_\gamma) \rightarrow \sim \rho \frac{N_A}{2} f(E_\gamma)$$

διότι  $A \approx 2Z$  μέχρι  $A \approx 2.6Z$  (εκτός του υδρογόνου)

η πιθανότητα να συμβεί το Compton είναι ανεξάρτητη του ατομικού αριθμού του υλικού.

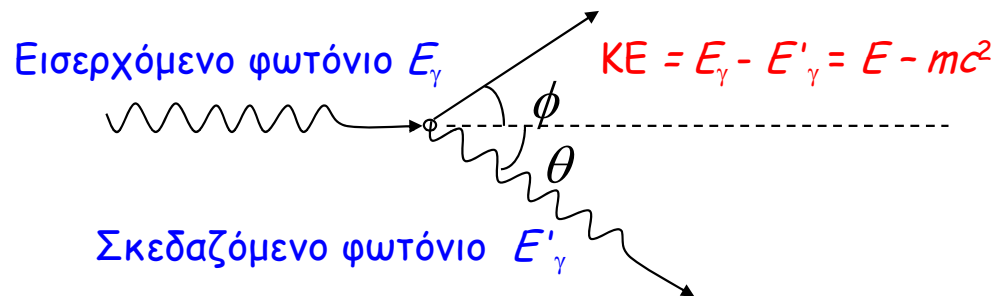


## Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η ενέργεια ενός φωτονίου αρχικής ενέργειας  $E_\gamma = 1 \text{ MeV}$  το οποίο σκεδάζεται μέσω Compton σε γωνία  $90^\circ$ .

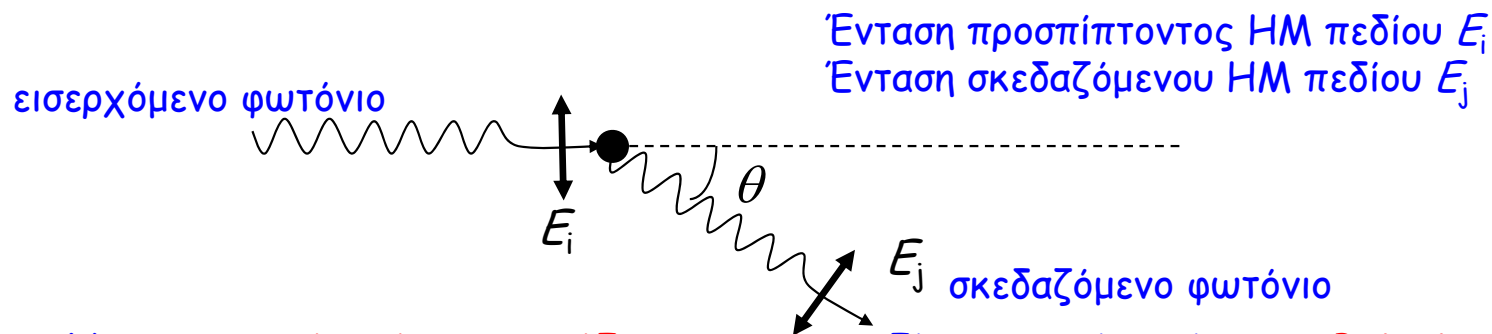
$mc^2 = 0.511 \text{ MeV}$  για ηλεκτρόνιο, σε γωνία  $\cos\theta = 0$

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{mc^2}(1 - \cos\theta)} = \frac{1 \text{ MeV}}{1 + (1 / 0.511)} = 0.338 \text{ MeV}$$



## Σκέδαση Thomson & Rayleigh

- Η επίδραση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου της ακτινοβολίας-γ επάνω στο ηλεκτρόνιο έχει ως αποτέλεσμα την ταλάντωση του ηλεκτρονίου για χαμηλές ενέργειες του φωτονίου.



- Η ενεργειακή ροή στη μονάδα του χρόνου δίνεται από το άνυσμα Poynting  $W = E \times H \rightarrow \langle W \rangle = \langle E^2 \rangle \epsilon_0 c$ . Η σκεδασθείσα ενέργεια σε χρόνο  $dt$  μέσα από επιφάνεια  $dS$  σε απόσταση  $r$  από το ηλεκτρόνιο δίνεται:

$$\langle E_j^2 \rangle \epsilon_0 c dS dt = \langle E_j^2 \rangle \epsilon_0 c r^2 d\Omega dt$$

- Θεωρώντας ένα ηλεκτρόνιο τότε η ίδια ενέργεια ισοδυναμεί με την εισερχόμενη επί την διαφορική ενεργό διατομή που σκεδάζεται στη γωνία  $d\Omega$ :

$$\langle E_i^2 \rangle \epsilon_0 c d\sigma dt \Rightarrow d\sigma = \frac{\langle E_j^2 \rangle}{\langle E_i^2 \rangle} r^2 d\Omega$$

Γ. Τσιπολίτης

## Σκέδαση Thomson & Rayleigh

Σκέδαση Thomson  $\xrightarrow{\text{άτομα με πολλά } e}$  σκέδαση Rayleigh

φωτόνια πάνω σε ελεύθερα ηλεκτρόνια χωρίς αλλαγή του μήκους κύματος.

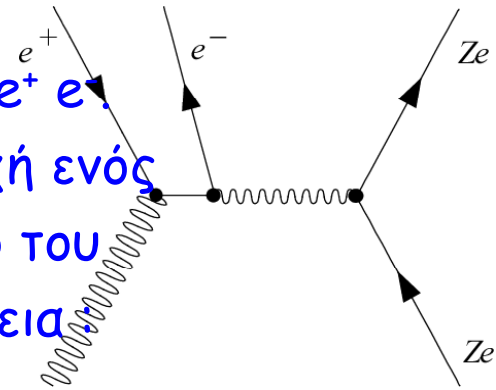
$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2$$

Σκέδαση Rayleigh θεμελιώδης στην περίθλαση ακτινών-Χ από κρυστάλλους.

- Και στις δυο σκεδάσεις δεν μεταφέρεται ενέργεια στο υλικό.
- Τα άτομα του υλικού δεν διεγείρονται, δεν ιονίζονται. Αλλάζει μόνο η διεύθυνση του φωτονίου.
- Για πολύ μεγάλες ενέργειες Χ & ακτινών-γ οι Thomson, Rayleigh είναι αμελητέες.
- Η σκέδαση Compton θεωρείται ως ΑΣΥΜΦΩΝΗ διαδικασία σκέδασης, όπου όλα τα ατομικά ηλεκτρόνια δρουν ανεξάρτητα.  $\rightarrow$  η ατομική ενεργός διατομή Compton είναι ίση με Ζ φορές την Klein-Nishina ενεργό διατομή.

## Δίδυμη Γένεση

- Μετατροπή ενός φωτονίου σ' ένα ζεύγος  $e^+ e^-$ . Το φαινόμενο συμβαίνει μόνο στην περιοχή ενός πυρήνα ή  $e$ . Χρειάζεται το πεδίο Coulomb του πυρήνα και απαιτείται μια ελάχιστη ενέργεια



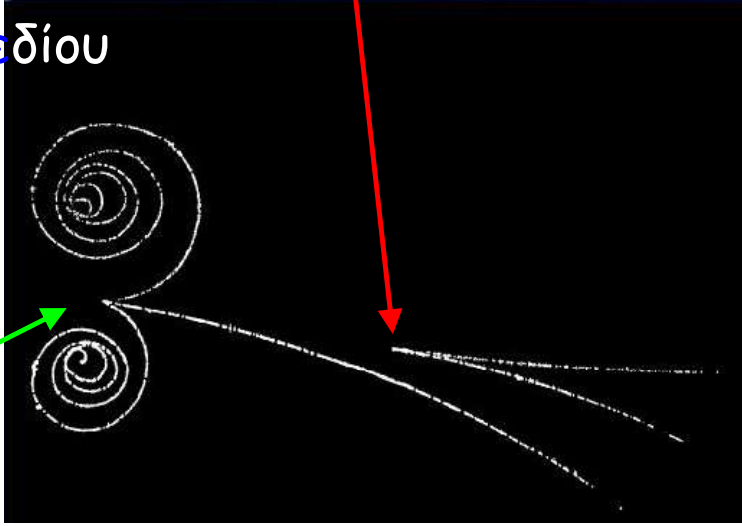
$$E_\gamma \geq 2m_e c^2 + \frac{2m_e^2 c^2}{m_{nucleus}} \quad \text{αλλά } m_{nucleus} \gg m_e \Rightarrow E_\gamma \geq 2m_e c^2$$

( $\gamma + nucleus \rightarrow nucleus' + e^+ + e^-$ )

- Επίσης μπορούμε να έχουμε δίδυμη γένεση και στην περιοχή του πεδίου Coulomb ενός ηλεκτρονίου με ενέργεια κατωφλίου:

$$E_\gamma \geq 4m_e c^2$$

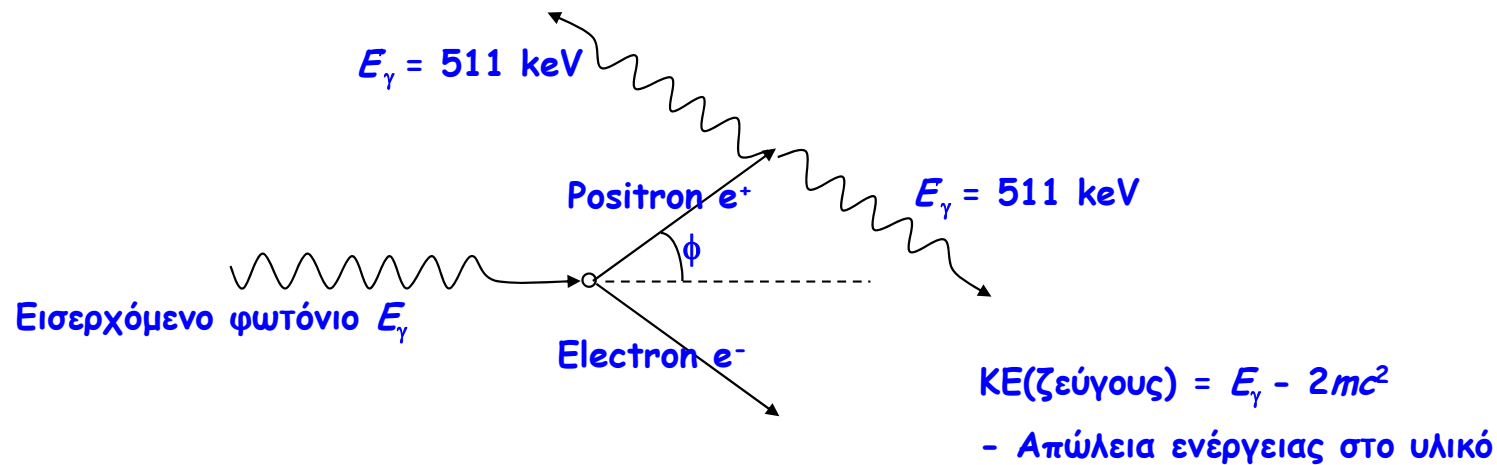
( $\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^+ + e^-$ )



Γ. Τσιπολίτης



## Δίδυμη Γένεση



- Το ποζιτρόνιο χάνει την ενέργεια του και "έλκει" ένα ηλεκτρόνιο και **εξαυλώνεται** σε δυο φωτόνια που το καθένα έχει ενέργεια **0.511 MeV**
- Η μέση ελεύθερη διαδρομή (**mean free path**) ενός φωτονίου για τη δημιουργία ενός ζεύγους  $e^+e^-$  σχετίζεται με το «μήκος ακτινοβολίας» (**radiation length**)  $X_0$  ηλεκτρονίων:

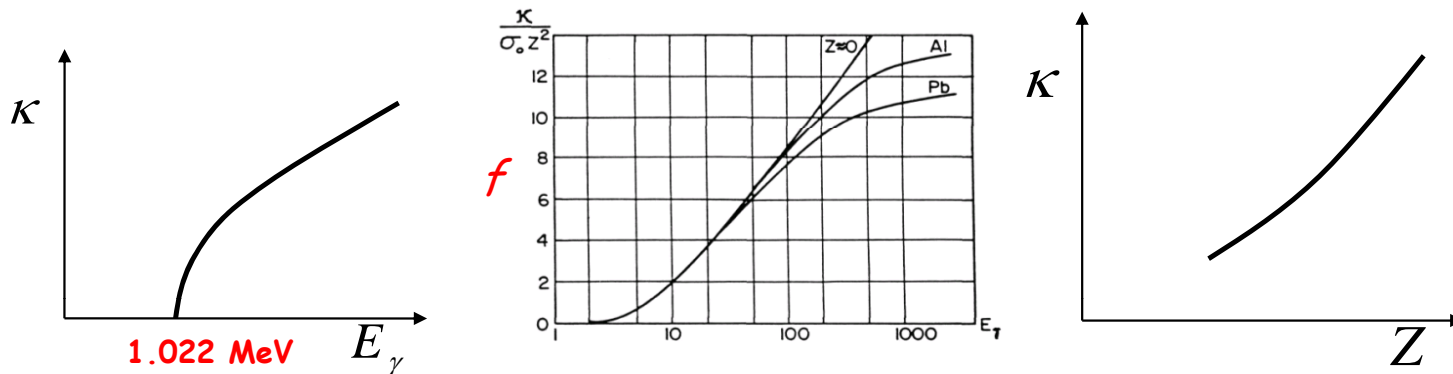
$$\lambda_{\text{ζεύγους}} = \frac{9}{7} X_0$$

## Δίδυμη Γένεση

- Η πιθανότητα να συμβεί η δίδυμη γένεση, ονομάζεται συντελεστής παραγωγής ζεύγους (**pair production coefficient**) είναι μια πολύπλοκη συνάρτηση της ενέργειας  $E_\gamma$ , και του ατομικού αριθμού  $Z$ . Μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$\kappa(m^{-1}) = NZ^2 f(E_\gamma, Z)$$

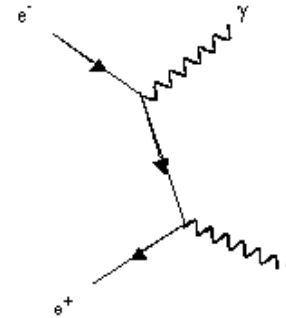
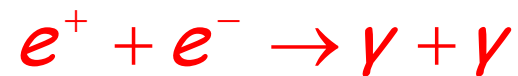
- $\kappa$  είναι η πιθανότητα να συμβεί η παραγωγή ζεύγους ανά μονάδα μήκους και  $f()$  μια συνάρτηση που μεταβάλλεται με την ενέργεια του φωτονίου και πολύ λίγο με τον ατομικό αριθμό.
- $\kappa$  αυξάνει με (ατομικό αριθμό, ενέργεια) και έχει κατώφλι 1.022 MeV.
- Από τους 3 συντελεστές είναι ο μόνος που αυξάνει με την ενέργεια.



Γ. Τσιπολίτης

## Εξαΰλωση Ποζιτρονίου

- τα ποζιτρόνια όταν διαπερνούν την ύλη εξαΰλώνονται με τα ηλεκτρόνια και δημιουργούν φωτόνια:



- Σε μεγάλες ενέργειες, το ποζιτρόνιο θα χάσει την ενέργεια του μέσω ιονισμού και ακτινοβολίας πέδησης μέχρι να αποκτήσει χαμηλή ενέργεια ώστε να εξαΰλωθεί.
- $e^+$  και  $e^-$  μπορούν να δημιουργήσουν μια προσωρινή δέσμη κατάσταση (**positronium**), παρόμοια αυτής του ατόμου του υδρογόνου.

Ενεργειακά επίπεδα positronium

$$E_{e^+e^-} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{2n^2}$$

Ενεργειακά επίπεδα ατόμου H

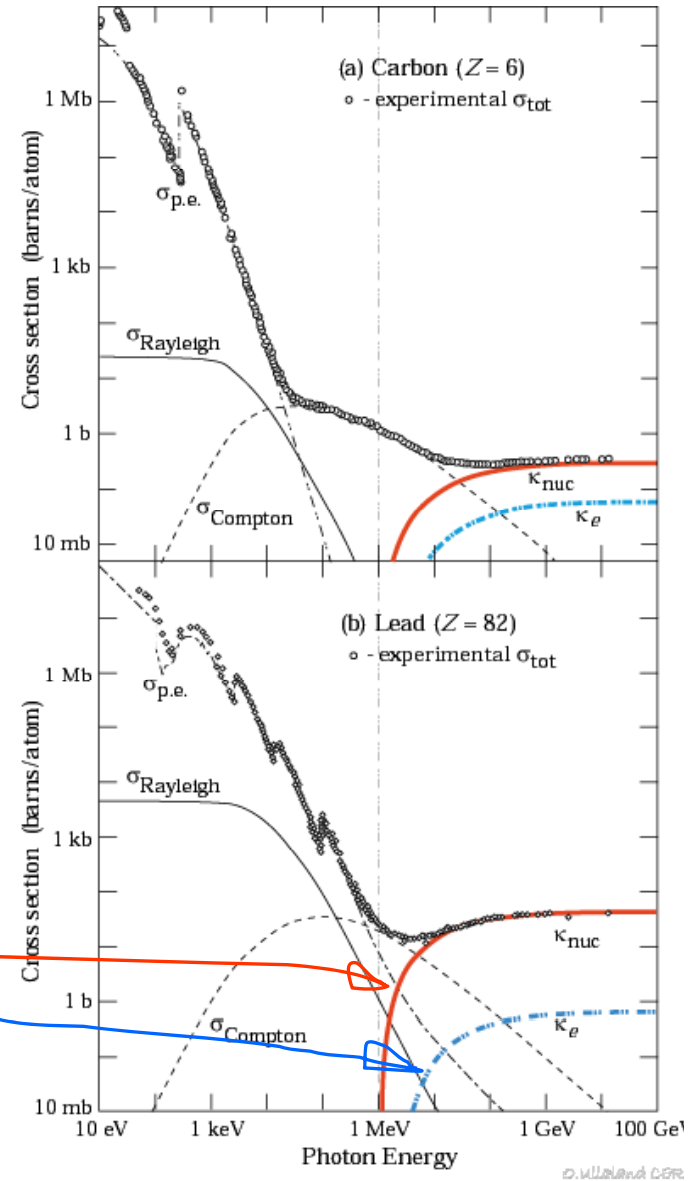
$$E_{p-e^-} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}$$

Γ. Τσιπολίτης

## Αλληλεπίδραση φωτονίων

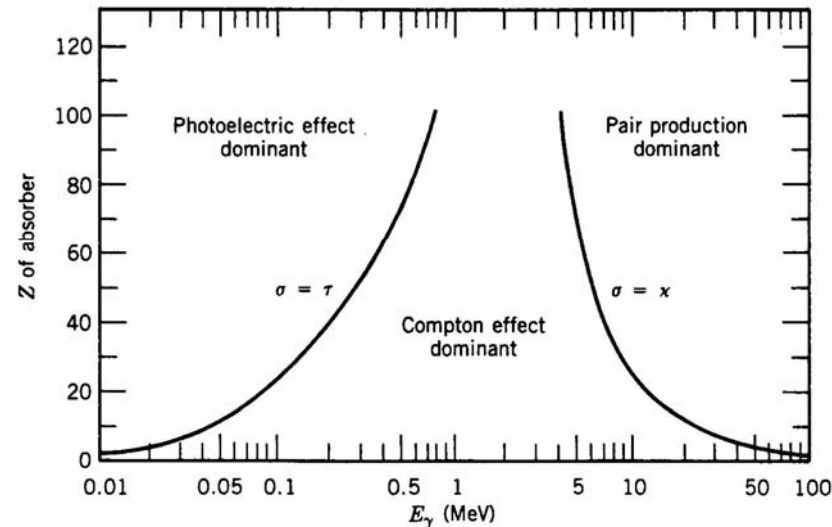
Ενεργός διατομή για την αλληλεπίδραση φωτονίων ως συνάρτηση της ενέργειας για C & Pb με τις επιμέρους συνεισφορές των διαφορετικών διαδικασιών.

- $\sigma_{pe}$  = Atomic photo-effect  
(electron ejection, photon absorption)
- $\sigma_{Rayleigh}$  = Coherent scattering  
(Rayleigh scattering-atom neither ionised nor excited)
- $\sigma_{Compton}$  = Incoherent scattering  
(Compton scattering off an electron)
- $\kappa_n$  = Pair production, nuclear field
- $\kappa_e$  = Pair production, electron field



Γ. Τσιπολίτης

## Αλληλεπίδραση φωτονίων



- Η ολική πιθανότητα αλληλεπίδρασης ανά μονάδα μήκους καλείται και γραμμικός συντελεστής απορρόφησης (**linear attenuation coefficient**) ισούται με το άθροισμα των τριών πιθανοτήτων ή ενεργών διατομών για τα αντίστοιχα 3 φαινόμενα:

$$\mu \text{ (cm}^{-1}\text{)} = \tau + \sigma + \kappa$$

- Ο συντελεστής σε cm<sup>2</sup>/g θα έχουμε τον μαζικό συντελεστή εξασθένησης:

$$\mu \text{ (cm}^2\text{/g)} = \mu \text{ (cm}^{-1}\text{)} / \rho \text{ (g/cm}^3\text{)}$$

Γ. Τσιπολίτης

## Παράδειγμα

Για μια ακτίνα γ ενέργειας 140 keV, ο μαζικός συντελεστής εξασθένησης για το Η είναι  $\mu_H=0.26 \text{ cm}^2/\text{g}$  και για το Ο είναι  $\mu_O=0.14 \text{ cm}^2/\text{g}$ . Ποια είναι η μέση ελεύθερη διαδρομή του αυτού του φωτονίου στο νερό;

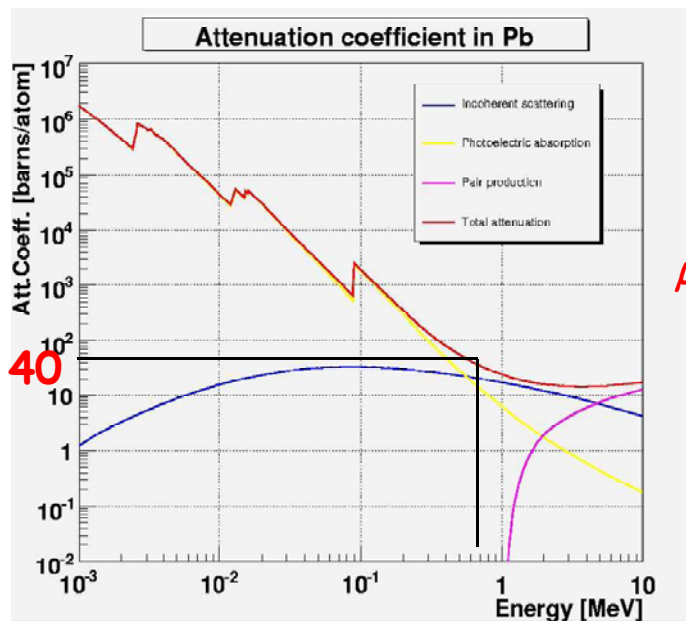
$$w_H=2/18 \text{ και } w_O=16/18$$

$$\mu_c = \sum_i w_i \mu_i = \left( \frac{2}{18} 0.26 + \frac{16}{18} 0.14 \right) \frac{\text{cm}^2}{\text{g}} = 0.153 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{\mu \rho} = \frac{1}{0.153 \cdot 1} = 6.52 \text{ cm}$$

## Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το πάχος ενός φύλλου μολύβδου ( $^{208}\text{Pb}$ ) που εξασθενεί μια δέσμη φωτονίων ενέργειας 662 keV που προέρχεται από μια ραδιενεργό πηγή  $^{137}\text{Cs}$  κατά ένα παράγοντα 10. Η πυκνότητα του Pb είναι  $\rho=11.3 \text{ g/cm}^3$ .



Από το διάγραμμα: η ολική ενεργός διατομή της αλλ/σης στο Pb  $\sigma=40\text{b/atom} \rightarrow$  ο γραμμικός συντελεστής εξασθένησης θα είναι:

$$\mu = N\rho\sigma = \frac{N_A}{A}\rho\sigma = \frac{6 \times 10^{23}}{208} 11.3 \times 40 = 1.3 \text{ cm}^{-1}$$

Ο αριθμός των φωτονίων που επιβιώνουν σε απόσταση  $x$ :

$$I = I_0 e^{-\mu x} \Rightarrow x = \frac{1}{\mu} \ln\left(\frac{I_0}{I}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{1.3} \ln(10) = \underline{\underline{1.77 \text{ cm}}}$$

## Παράδειγμα

- Ένα πάχος 2 mm ενός φύλλου μολύβδου ( $^{208}\text{Pb}$ ) πυκνότητας  $\rho=11.3 \text{ g/cm}^3$  εξασθενεί μια δέσμη φωτονίων κατά ένα παράγοντα 8.4. Να υπολογιστεί η ενέργεια των φωτονίων.

$$I = I_0 e^{-\mu x} \Rightarrow I = I_0 e^{-\frac{N_A}{A} \rho \sigma x} \Rightarrow \sigma = \frac{A}{x N_A \rho} \ln\left(\frac{I_0}{I}\right)$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{208}{0.2 \times 6.023 \times 10^{23} \times 11.3} \ln(8.4) = 32.6 \text{ b/atom}$$

