with $Q$, but not as rapidly as the strong coupling $\alpha_3(Q)$ in eq. (6.6). If $\alpha_3$ decreases, one suspects that there may be some energy at which $\alpha_3(Q) = \alpha_2(Q)$, as illustrated in fig. 6.2. However, because of the relatively slow logarithmic variation in eq. (6.6) it is clear that this Grand Unification scale will be rather large. Indeed, calculations [175–177], [181–189] with $\Lambda_{QCD} \sim$ (0.1 to 1 GeV) and $\alpha = 1/137$ to set the weak interaction scale yield unification at about $10^{15}$ GeV, the scale mentioned in eq. (6.4). While this scale may seem vertiginously high to particle physicists, it is in fact considerably less than the Planck scale of $10^{19}$ GeV, which is the energy at which quantum gravity effects,

$$G_N E^2 \approx O(1), \tag{6.7}$$

become of order unity. It is therefore a self-consistent first step to neglect gravitation in building a Grand Unified Theory, though we will later (in lecture 10) go on to consider the unification with gravity [4]. For the moment, armed with figs. 6.1 and 6.2, we look for a suitable Grand Unifying group $G$ (6.4).

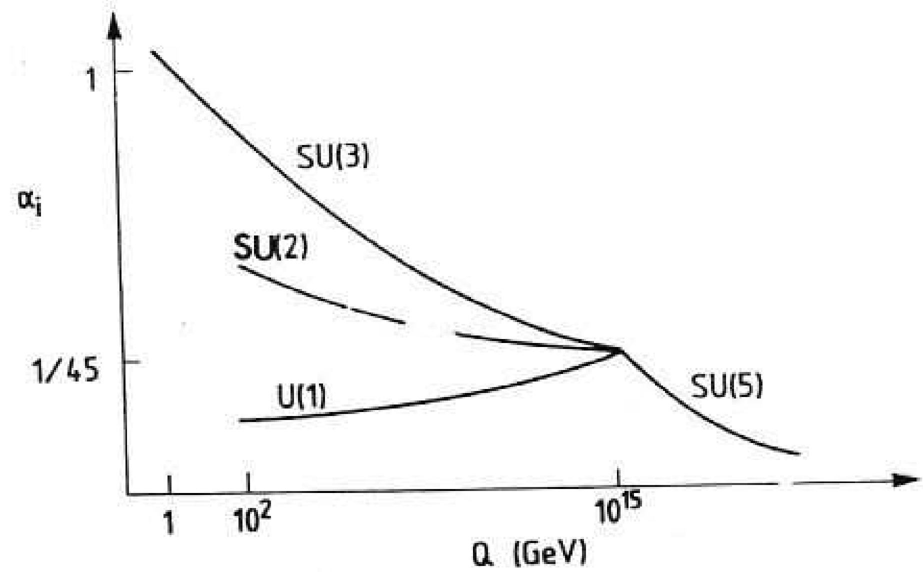



Fig. 6.2. A sketch of the manner in which the SU(3), SU(2) and U(1) coupling constants are supposed to come together in a GUT.

• Ένας τρόπος να περιοριστούν οι ελεύθερες παράμετροι του S.M. είναι να θεωρήσει κανείς ότι είναι τμήμα μιας θεωρίας με μεγαλύτερη συμμετρία

$$SU(5) \supset SU(3) \times SU(2) \times U(1)$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta_W \quad \left( \tan\theta_W = \frac{g_1}{g_2} \right)$$

$$\frac{d g_n}{d(\ln \mu)} = - b_n g_n^3$$

$$b_n = (11n - 2n_f)/48\pi^2 \quad \text{γιά} \quad n \geq 2$$

$$b_1 = - n_f / 24\pi^2$$

LEP Data $\rightarrow$ $N=1$, $SU(5)$ με ~~Susy~~ σε $O(1\,\text{TeV})$

# Μεγαλοενοποιημένες Θεωρίες

## Το μοντέλο SU(5)

Απο τη θεωρία ομάδων

$$SU(5) \supset SU(3) \times SU(2) \times U(1)$$

$$5 = (3,1)_{-2/3} + (1,2)_{1}$$

$$10 = (3,2)_{1/3} + (\bar{3},1)_{-4/3} + (1,1)_{2}$$

$$24 = (8,1)_{0} + (3,2)_{-5/3} + (\bar{3},2)_{5/3} + (1,3)_{0} + (1,1)_{0}$$

Επίσης

αντισυμμετρικός τανυστής $\psi_{ij} = -\psi_{ji}$

$$5 \times 5 = 10 + 15$$

$$10 \times 10 = \bar{5} + 4\bar{5} + 50$$

$$\bar{5} \times 10 = 5 + 45$$

Σε μετασχηματισμούς $SU(5)$ μία γενική αναπαράσταση εκφράζεται σε τανυστική μορφή ως

$$\psi^{ij\ldots}_{kl\ldots} \longrightarrow U^i_m U^j_n U^s_k U^t_l \cdots \psi^{mn\ldots}_{st\ldots}$$

όπου όλοι οι δείκτες είναι από 1 έως 5 και οι πίνακες (δες π.χ. Cheng + Li)

$$[U]^i_m = \left[\exp\left(i\alpha^a \lambda^a/2\right)\right]^i_m$$

είναι 5×5 μοναδιακοί. Οι $\{\lambda^a\}$, $a=0,1,\ldots 23$ είναι ένα σύνολο από $24\ (=5^2-1)$, 5×5 γενικευμένους πίνακες Gell-Mann, που είναι Ερμιτιανοί και χωρίς ίχνος (ώστε οι $U$ να είναι μοναδιακοί με ορίζουσα μονάδα). Έχουν νορμαλισμό $tr(\lambda^a\lambda^b)=2\delta^{ab}$ και ικανοποιούν τη σχέση $\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2}\right] = i C^{abc}\frac{\lambda^c}{2}$

Παραδείγματα πινάκων $\lambda^a$

$$\lambda^a = \begin{bmatrix} & \lambda^a & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$a = 1, \ldots, 8$
(γεννήτορες του $SU(3)$)

(τα αντίστοιχα διανυσματικά μποζόνια είναι τα γλουόνια)

$$\lambda^{9,10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\sigma_{1,2}} \\ 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix}, \quad \lambda^{11} = \text{διαγ.}\left(0, 0, 0, 1, -1\right)$$

(γεννήτορες του $SU(2)$) (αντιστοιχούν τα $W^\pm$, $W_3$)

$$\lambda^{12} = \frac{1}{\sqrt{15}}\,\text{διαγ.}\left(-2, -2, -2, 3, 3\right)$$ (αντιστοιχεί το $B$)

$$\lambda^{13} = \begin{bmatrix} & O & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & O \end{bmatrix}, \quad \lambda^{14} = \begin{bmatrix} & O & & i & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ -i & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & O \end{bmatrix}$$

κ.λ.π

Ας θυμηθούμε ότι

$$\psi^c \equiv C\bar{\psi}^T$$

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = -C^{-1} = -C^{+} = -C^T$$

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T$$

$$\rightsquigarrow \psi_L^c = \tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi^c = \tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)C\bar{\psi}^T$$

$$= C\tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)\bar{\psi}^T = C\left[\bar{\psi}\tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)\right]^T$$

$$= C\left(\bar{\psi}_R\right)^T$$

όμοια

$$\bar{\psi}_L^c = \psi_R^T C = -\psi_R^T C^{-1}$$

Έτσι μπορούμε να απαριθμήσουμε π.χ. τα quarks της $1^{ης}$ οικογένειας χρησιμοποιώντας τους $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U_1$

$u_L, d_L$ : $(3,2)_{1/3}$ ικανοποιώντας αριθμούς

$d_L^c$ : $(\bar{3},1)_{2/3}$ και μόνο αριστερόστροφα πεδία

$u_L^c$ : $(\bar{3},1)_{-4/3}$

## Κβάντωση του Φορτίου

- Σε ενοποίηση των αλλ/σεων με χρήση απλής μη-αβελιανής ομάδας Lie προκύπτει κβάντωση του φορτίου. Ο τεχνικός λόγος είναι το γεγονός ότι οι ιδιοτιμές των γεννητόρων σε αυτή την περίπτωση είναι διακριτές (σε αντίθεση με την αβελιανή που έχει συνεχείς).

$SU(5)$

Το $Q$ ως προσθετικός κβαντικός αριθμός προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός των διαγωνίων γεννητόρων.

Στο $SU(5)$ υπάρχουν 4 διαγώνιοι γεννήτορες (rank 4). Επειδή το $Q$ μετατίθεται με όλους τους γεννήτορες του $SU(3)_c$ (πού έχει 2 διαγώνιους ως rank 2) προκύπτει ότι

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} = \frac{1}{2}\lambda^{11} + c\,\lambda^{12}$$

Με σύγκριση των ιδιοτιμών του $\lambda^{12}$ με τις τιμές του $Y$ των σωματιδίων που περιγράφει η $\mathbf{5}$ $\rightarrow$ $c = -(5/3)^{1/2}$ (άσκηση)

Συνεπώς

$$Q = \text{διαγ.}\left(-1/3, -1/3, -1/3, 1, 0\right)$$

και για την $\psi_i \in 5 \rightarrow Q\psi_i = q_i\,\delta_{ij}$, $Q\psi^i = -q_i\,\delta_{ij}$ που γενικεύεται για $\psi^{ij\ldots}_{k\ell\ldots}$

• Η απουσία ίχνους $\rightarrow$ $3q_d + q_{e^-} = 0$!

Η πρώτη οικογένεια φερμιονίων μπορεί να περιγραφεί από τις αναπαραστάσεις $\bar{5} + 10$:

$$SU_5 \supset SU(3) \times SU(2) \times U(1)$$

$$\bar{5} = (\bar{3}, 1)_{2/3} + (1, 2)_{-1} = d_L^c + (\nu_e, e^-)_L$$

$$10 = (3, 2)_{1/3} + (\bar{3}, 1)_{-4/3} + (1, 1)_2$$

$$= (u, d)_L + u_L^c + e_L^+$$

Τα μποζόνια βαθμίδας:

$$24 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{gluons}}}{(8,1)_0} + \underset{\substack{\uparrow \\ X^{-4/3} \\ Y^{-1/3}}}{(3,2)_{-5/3}} + \underset{\substack{\uparrow \\ X^{4/3} \\ Y^{1/3}}}{(\bar{3},2)_{5/3}} + \underset{\substack{\uparrow \\ W^{\pm} \\ W_3}}{(1,3)_0} + \underset{\substack{\uparrow \\ B}}{(1,1)_0}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:cc} & & & X_1 & Y_1 \\ & \text{gluons} & & X_2 & Y_2 \\ & & & X_3 & Y_3 \\ \hdashline X_{\bar{1}} & X_{\bar{2}} & X_{\bar{3}} & W_3/\sqrt{2} & W^+ \\ Y_{\bar{1}} & Y_{\bar{2}} & Y_{\bar{3}} & W^- & -W_3/\sqrt{2} \end{array}\right) + \frac{B}{\sqrt{60}} \begin{pmatrix} -2 & & & & \\ & -2 & & 0 & \\ & & -2 & & \\ & 0 & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

Αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας με

$H \sim 24$

$\phi \sim 5$

$$SU(5) \xrightarrow{\langle H \rangle} SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1) \xrightarrow{\langle \phi \rangle} SU(3) \times U(1)$$

$$V(H,\phi) = V(H) + V(\phi) + \lambda_4 (\mathrm{tr} H^2)(\phi^+ \phi) + \lambda_5 (\phi^+ H^2 \phi)$$

όπου

$$V(H) = -m_1^2 (\mathrm{tr} H^2) + \lambda_1 (\mathrm{tr} H^2)^2 + \lambda_2 (\mathrm{tr} H^4)$$

$$V(\phi) = -m_2^2 (\phi^+ \phi) + \lambda_3 (\phi^+ \phi)^2$$

Γιά $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 > -\frac{7}{30}$

$$\rightarrow \langle H \rangle = v_1 \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -3 \end{bmatrix}$$

οπου $v_1^2 = m_1^2 / (60\lambda_1 + 14\lambda_2)$

Τα X, Y αποκτούν μάζα

$$\mathcal{L}_{\alpha\lambda\lambda.} = -\frac{g_5}{2} G^a_\mu \left(\bar{u}\gamma^\mu\lambda^a u + \bar{d}\gamma^\mu\lambda^a d\right)$$

$$-\frac{g_5}{2} W^i_\mu \left(\bar{Q}_L\gamma^\mu \tau^i Q_L + \bar{L}\gamma^\mu\tau^i L\right)$$

$$-\frac{g_5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{1/2 *} B_\mu \sum_{\substack{\text{ορατα}\\ \text{φερμιόνια}}} \bar{f}\gamma^\mu Y f$$

$$-\frac{g_5}{2}\Big[X^-_{\mu,\alpha}\big(\bar{d}_R\gamma^\mu e^c_R + \bar{d}^\alpha_L\gamma^\mu e^c_L + \\ + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}^{c\gamma}_L\gamma^\mu u^\beta_L\big) + h.c.\Big]$$

$$-\frac{g_5}{2}\Big[Y^-_{\mu,\alpha}\big(\bar{d}^\alpha_R\gamma^\mu \nu^c_R + \bar{u}^\alpha_L\gamma^\mu e^c_L \\ + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}^{c\beta}_L\gamma^\mu d^\gamma_L\big) + h.c.\Big]$$

Συγκρίνοντας τον όρο του υπερφορτίου με τον αντίστοιχο στο S.M.

$$\rightsquigarrow \underset{\uparrow}{g'} = g_5\sqrt{\frac{3}{5}}$$

όπως ορίστηκε στο W-S

$$\rightsquigarrow \sin^2\theta_W = \frac{g'^2}{g^2+g'^2} = \frac{3}{8}$$

Προφανώς $g_{strong} = g_{SU(2)} = g_5$

$$\begin{cases} * \; g_5\lambda^{12}A^{12}_\mu = g' Y B_\mu \\ \text{αλλά } Y = -(5/3)^{1/2}\lambda^{12} \rightsquigarrow g' = -(3/5)^{1/2} g_5 \end{cases}$$

Η εξέλιξη των σταθερών σύνδεσης υπακούει τις εξισώσεις της ομάδας επανα/σης (R.G.E.):

$$\frac{dg_n}{d(\ln\mu)} = -b_n g_n^3$$

$$b_n = (11n - 2N_F)/48\pi^2 \quad , \quad n \geq 2$$

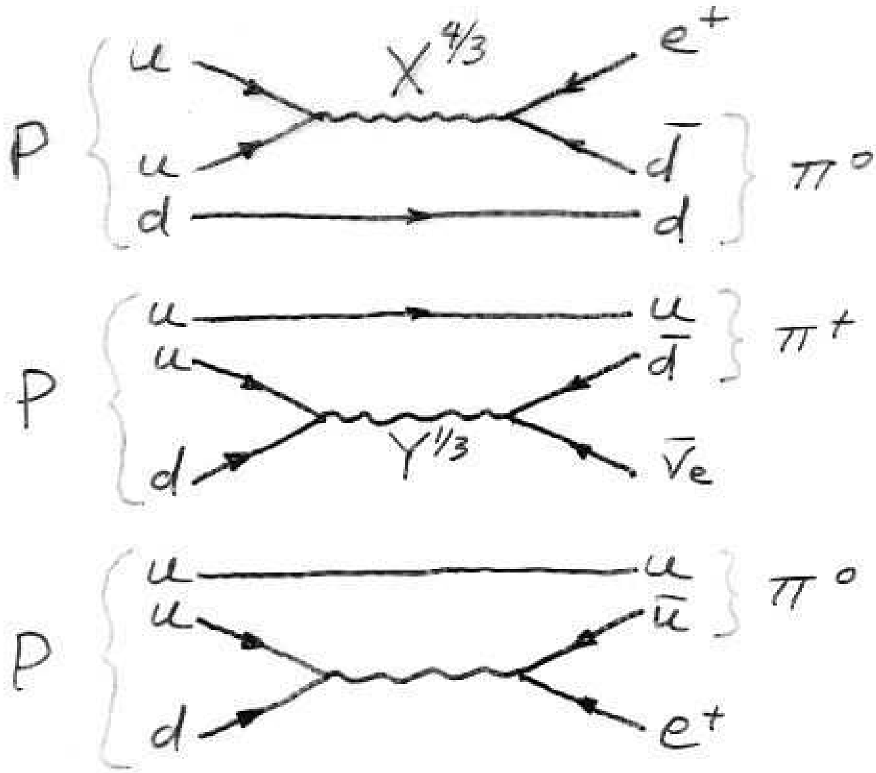
$$b_1 = -N_F/24\pi^2$$

Απαιτώντας $g_3 = g_2 = g_1 \left(= g'\sqrt{\tfrac{5}{3}}\right) = g_5$

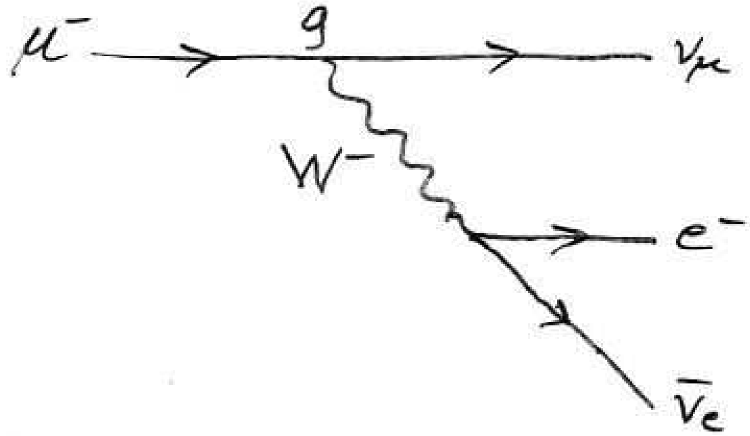
$$\sin^2\theta_W(M_W) \simeq 0.21$$

$$M_X \simeq 4 \cdot 10^{14}\ \text{GeV}$$

άσκηση




Όπως στη διάσπαση μιονίου $\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$




$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8 M_W^2}$$

$$\Gamma(\mu \to e \bar{\nu}_e \nu_\mu) = \ldots G^2 m_\mu^5 = \ldots \frac{m_\mu^5}{M_W^4}$$

$$\to \Gamma(p \to e^+ \pi^0) = \ldots \frac{m_p^5}{M_X^4}$$

$$\tau_p \simeq \frac{M_X^4}{m_p^5} \sim 10^{30 \pm 2}\ \text{ys}$$

In $SU(5)$

Yukawa couplings

$$f_1\, 10_f\, 10_f\, 5_H + f_2\, 10_f\, \bar{5}_f\, \bar{5}_H$$

$$\langle 5_H \rangle = (0, 0, 0, 0, v)$$

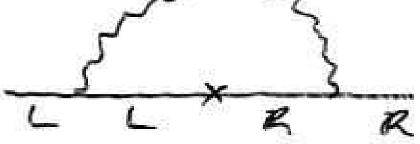
$$\Longrightarrow \quad v f_1\, \bar{u}u + v f_2\, (\bar{d}d + \bar{e}e)$$

i.e. $\quad "m_e" = "m_d"$ Boundary conditions at the unification scale.

$$\begin{array}{ccc} e & & d \\ \mu & & s \\ \tau & & b \end{array}$$

The $SU(5)$ symmetric relations are obtaining significant renormalization corrections.

$$m(\mu) = m - m g_n^2\, b_m^{(n)} \ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \Longleftrightarrow$$




$$\Longrightarrow \quad \frac{d \ln m(\mu)}{d \ln \mu} = b_m^{(n)}\, g_n^2(\mu)$$

where $g_n^2$ solutions of

$$\frac{d g_n^2(\mu)}{d \ln \mu} = -2 b_n g_n^4(\mu)$$

with $b_n = (11n - 2N_F)/48\pi^2 \quad , n \geq 2$

$b_1 = - N_F/24\pi^2$

and $$b_m^{(n)} = -\frac{3}{8\pi^2} \underbrace{\sum_a \left(T^a T^a\right)_{ij}}_{\text{III} \atop C_2(R)}$$

$$C_2(R) = \frac{\dim(\text{adj})}{\dim(R)} \, \ell(R_i) \quad \text{for } SU(n), n \geq 2$$

$$(T^0)^2 = \frac{3}{5}\left(\frac{Y}{2}\right)^2$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{m(\mu)}{m(\mu_0)} = \left[\frac{g_n(\mu)}{g_n(\mu_0)}\right]^{-\frac{b_m^{(n)}}{b_n}}$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{m_b}{m_\tau} \simeq 3 \quad \text{at} \quad \mu = \mu_{th} \sim 10\,\text{GeV}$$

also $$\underset{200}{\underset{\shortparallel}{\frac{m_\mu}{m_e}}} = \underset{20}{\underset{\shortparallel}{\frac{m_s}{m_d}}}$$